جامعة قاصدي مرباح–ورقلة

محاضـــرات في الفيزياء

الكهرباء و المغناطيسية



د.شهرة ثورية أستاذة محاضرة

مستوى أولى علوم و تقنيات وعلوم المادة

بسم الله الرحمن الرحيم

المحتويات

الفصل الثالث: الكهرباء المتحركة

الفصل الرابع: المغناطيسية في الفراغ

المـــــــلاحــــق

المقدمــة

علم الفيزياء علم تجريبي يعتمد على الملاحظات و القياسات الدقيقة لاستنباط القوانين و النظريات، و يشمل عدة فروع، من أهمها الكهرباء و المغناطيسة التي تعتبر من أقدم التفاعلات المعروفة من بين التفاعلات بين الجسيمات. هذه المحاضرات، و التي هي مدخل لفيزياء الكهرباء و المغناطيسية، تتفق مع المنهاج الموضوع من قبل الوزارة لطلاب السنة الأولى LMD، علوم و تقنيات و علوم المادة، معروضة بشكل مبسط، مصحوبة ببعض التمارين التوضيحية و الملاحق الهامة.

لقد تم تقسيم هذه المحاضرات إلى أربعة فصول، يحوي الفصل الأول كل ما يتعلق بالكهرباء الساكنة الخاصة بشحنة نقطية أو جسم مشحون، و القوانين المباشرة لحساب الحقل و الكمون الكهربائيين باستخدام قانون كولوم و نظرية غوص، أو بطريقة غير مباشرة باستخدام تدرج الكمون الكهربائي أو تجوال الحقل الكهربائي.

أما الفصل الثاني فيتضمن دراسة النواقل في حالة الاتزان الكهروستاتيكي، و أيضا تأثيرات النواقل على بعضها، بالإضافة إلى دراسة المكثفات و كيفية حساب سعتها. يهتم الفصل الثالث بالكهرباء المتحركة التي تختص بدارسة التيار الكهربائي مجهريا و أيضا جهريا، و تطبيق قانوني كيرشوف، سواء على الدارة أو على الشبكات التي تحوي مقاومات و مولدات و عناصر استقبال. الفصل الرابع و الأخير يشمل التفاعلات المغناطيسية الناتجة و المؤثرة على شحنة نقطية متحركة و على تيار كهربائي.

أخيرا أرجو الله أن أكون قد وفقت في عرض المحاضرات و حققت الغاية المرجوة منها و أقدم جزيل الشكر لكل من ساهم في إنجازها. و مع ذلك فإن هذا الجهد لا يخلو من ملاحظات هنا أو هناك، أتمنى أن تصلنا، و هذا طبعا من كرم القارئ. و الله ولي التوفيق.

د.شهرة ثورية

أستاذ محاضر بجامعة ورقلة

الفصل الأول

الكهرباء الساكنة في الفراغ

الكهرباء الساكنة هي دراسة الظواهر المتعلقة بالشحنات الساكنة. سنبدأ هذا الفصل بوصف الشحنة الكهربائية و خصائصها، ثم نناقش قانون كولوم الذي يصف القوة المؤثرة بين شحنتين كهربائيتين ساكنتين في الفراغ، و ندخل مفهوم الحقل الكهربائي و الكمون الكهربائي الناتج عن توزيع شحني. نحسب أيضا الحقل الكهربائي و الكمون الناشئين عن ثنائي القطب على مسافات بعيدة. و نتطرق إلى أهم النظريات لحساب الحقل الكهربائي و هي نظرية التدفق أو بما تسمى نظرية غاوس و كيفية استعمالها.

1.1 الشحنة الكهربائية

تجربة 1: عند مشط الشعر و تقريبه من قصاصات الورق نلاحظ أنها تنجذب بسرعة إلى المشط.

تجربة 2: عند دلك بالون منفوخ بالصوف وتقريبه من الجدار فإنه سيلتصق به لساعات.

أثبتت العديد من التجارب أن الأجسام تكتسب عند دلكها خاصية جديدة تسمى "الكهرباء" من شأن هذه الخاصية أن تولد تفاعلا يسمى "التأثير الكهربائي". في الواقع كل الأجسام قابلة للتكهرب سواء بالدلك أو بالتلامس مع جسم مكهرب أو بوصل الجسم بأحد طرفي مولد.

تنتج قوى التأثير الكهربائي عن وجود مقدار فيزيائي مميز للجسيمات يدعى" الشحنة الكهربائية" (*Charge électrique*)، وهي تؤدي دورا مشابها لدور الكتلة في التفاعلات الثقالية. لقد وجد بنجمين فرانكلين (*Benjamin Franklin 1706-1790*) من خلال تجاربه أن هناك صنفين من الشحنات، حيث أخذ قضيبا من المطاط القاسي ثم دلكه بواسطة الصوف و علقه بواسطة خيط غير معدني، ثم قرب إليه قضيبًا من زجاج مدلوك بالحرير فلاحظ أنهما ينجذبان، و عند تقريب قضيب من المطاط، أي من نفس النوع، تنافر معه.

من خلال التجارب و بالاتفاقيات، اصطلح على اعتبار الشحنة الموجودة على القضيب الزجاجي شحنةً موجبةً (*charge positive*) (+)، و كل ما يتنافر معها فهو شحنة موجبة أيضا، و الموجودة على القضيب المطاطي سالبةً (*charge négatif*) (−) و كل ما يتنافر معها فهو شحنة سالبة.

ملاحظة: الأجسام الحاملة للنوع نفسه من الشحنات تتنافر، و الأجسام الحاملة لنوعين مختلفين تتجاذب، أما الأجسام التي لا تتبادل التأثير الكهربائي فهي متعادلة كهربائيا.

سلوك الأجسام الكهربائي يتحدد بقابلية حركة الشحنة الكهربائية، لذلك يمكن أن نقسم المواد إلى نوعين:

النواقل (*Conducteurs*): حيث يمكن للشحنات فيها أن تنتقل بحرية لمسافات معتبرة أمام المسافات الفاصلة بين الذرات مثل: المعادن، المحاليل،.... و يكون الناقل جيدا كلما كثرت شحناته و سهلت حركتها.

العوازل (*Isolants*): و هي عكس النواقل، لا تسمح بهذه الحرية لانتقال الشحنات، فهي تبقى متوضعة محلَّها مثل: الزجاج، الخشب، البلاستيك....

ملاحظات:

- ✓ تصنف معظم الأجسام إلى أحد النوعين السابقين باستثناء القليل مثل: الجرمانيوم، السليسيوم، الكربون .... فتصنف كأشباه نواقل .
- ✓ عند دلك المطاط الذي يعتبر عازلا يجذب له قصاصات الورق، هل يعني هذا أنه أصبح ناقلا؟. في الواقع تصبح المساحة المدلوكة فقط مشحونة، وأن الشحنة لا تتمكن من الحركة إلى مناطق أخرى من المادة، و على العكس عند دلك مادة ناقلة كالنحاس لا نلاحظ انجذاب قصاصات الورق، و ذلك بسبب أن الشحنة الناتجة عن الدلك في موضع صغير توزعت عبر كامل سطح المادة، فلو أننا أمسكنا قضيب النحاس بمقبض من الخشب فإنه يحدث انجذاب لقصاصات الورق كما حدث للعوازل في التجربة 1.

2.1 تكمية الشحنة و انحفاظها

سمحت لنا المعلومات المتوفرة حاليا حول بنية المادة بتفسير ظواهر التكهرب، و أكدت أن الشحنات الكهربائية الموجودة في الطبيعة عبارة على أعداد صحيحة لشحنة أساسية غير قابلة للانقسام e، و قد بيَّن ذلك روبرت ميليكان سنة 1909 (*Robert Millikan 1868-1953*)، و هو ما نصطلح عليه بتكمية الشحنة الكهربائية:

$$q = \pm Ne$$

حيث N عدد طبيعي.

الشحنة الكهربائية مقدار فيزيائي قابل للقياس، و وحدته في النظام الدولي SI هي الكولوم ويرمز لها بـ C، و الشحنة الأساسية $e = 1.6 \times 10^{-19}C$، أما أجزاء الكولوم فيمكن ذكر بعضها:

$$1\mu C\ (\text{الميكوكولوم}) = 10^{-6}C$$
$$1nC\ (\text{النانوكولوم}) = 10^{-9}C$$
$$1pC\ (\text{البيكوكولوم}) = 10^{-12}C$$

- ✓ إن عملية دلك جسم بواسطة جسم آخر لا تخلق الشحنة، فكل ما حدث هو انتقال الشحنة من جسم لآخر، فأحد الأجسام يكتسب مقدارا من الشحنة الموجبة بينما الآخر يكتسب مقدارًا مساويًا من الشحنة السالبة، فدلك قضيب من الزجاج مع الحرير أحدث حصول الحرير على شحنة سالبة و القضيب على نفس الشحنة، و لكنها موجبة. إن معرفة التركيب الذري تجعلنا نفسر ما حدث على أنه انتقال الالكترونات، و هي سالبة الشحنة، من الزجاج إلى الحرير.
- ✓ تفرض علينا الظواهر الكهربائية قبول أن الشحنة لا تفنى و لا تستحدث، و لكنها تتحول من جسم إلى آخر في نظام معزول، حيث يبقى المجموع الكلي الجبري للشحنات ثابتًا (قانون انحفاظ الشحنة (*conservation du charge*)، فعملية التكهرب في نظام معزول ما هي إلا إعادة توزيع للشحنات.

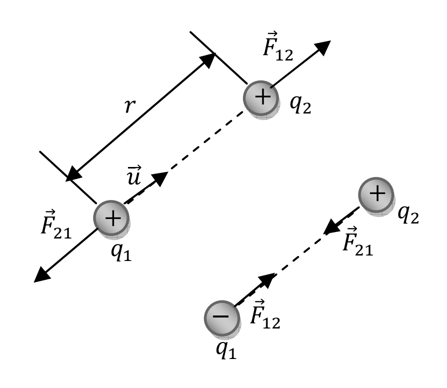
الجسم	الشحنة(C)
الإلكترون (*électron*)	-1.602×10^{-19}
البروتون (*proton*)	$+1.602 \times 10^{-19}$
النيوترون (*neutron*)	0

ملاحظات:

- ✓ عند نزع عدد من الإلكترونات من جسم يصبح موجب الشحنة، أمَّا عند إضافة عدد من الإلكترونات إليه يصبح سالب الشحنة.
- ✓ **الشحنة النقطية** (***charge ponctuelle***): هي تجريد علمي، و هي عبارة عن جسم مشحون أبعاده مهملة بالمقارنة مع المسافات التي تفصله عن باقي المؤثرات، و هي تؤدي الدور نفسه الذي تؤديه "النقطة المادية" في الميكانيكا.

3.1 قانون كولوم

نتيجة التجارب التي قام بها العالم تشارلز كولوم (*Charles Coulomb 1736-1806*) على الشحنات النقطية **الساكنة** لتحديد خصائص القوة الكهروستاتيكية (*force électrostatique*) التي تؤثر بها شحنة q_1 على شحنة ثانية q_2، أو العكس، وجد أن:



← القوة الكهروستاتيكية محمولة على المستقيم الواصل بين الشحنتين.

← تتناسب القوة طردا مع جداء الشحنتين حيث:

- إذا كانت q_1 و q_2 من إشارة واحدة فالجداء يعطي إشارة موجبة $+|q_1||q_2|$
- إذا كانت q_1 و q_2 متعاكستين في الإشارة فالجداء يعطي إشارة سالبة $-|q_1||q_2|$

← تتناسب القوة عكسيا مع مربع البعد بين الشحنتين r^2.

العبارة الرياضية لقانون كولوم هي:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (1)$$

حيث: $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ و $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

الثابت k يدعى "الثابت الكهربائي" أو " ثابت كولوم" و يتعلق بجملة الوحدات المستخدمة:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 Nm^2C^{-2} \quad (\text{النظام SI})$$

ε_0 : سماحية الفراغ (*permittivité du vide*).

ملاحظات:

- ✓ يمكن أن نعرف الكولوم على أنه شحنة نقطية إذا وضعت على بعد 1 متر من شحنة مماثلة تكون خاضعة لقوة مقدارها 9×10^9 نيوتن.
- ✓ قوة كولوم هي من نوع القوى المركزية، لذلك فهي قوة مشتقة من كمون.
- ✓ إن قانون كولوم مشابه لقانون الجذب العام بين جسيمين كتلتاهما m_1 و m_2: $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$.
- ✓ تخضع القوى الكهربائية الى مبدأ التراكب (*principe de superposition*)، فالقوة الكهربائية $\vec{F}$ المؤثرة على الشحنة q_0 من طرف الشحنات q_1، q_2، q_3 ... q_N تساوي المجموع الشعاعي لكل القوى:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i0} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \cdots + \vec{F}_{N0}$$

مثال 1: مقارنة بين القوة الكهربائية و قوة التجاذب الكتلي.

يفصل بين إلكترون و بروتون ذرة الهيدروجين مسافة $5.3 \times 10^{-11}\text{m}$. أوجد مقدار القوة الكهربائية و قوة التجاذب الكتلي بين الإلكترون و البروتون، حيث:

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}\,; \qquad m_p = 1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$$

من قانون كولوم نجد:

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2} = \left(9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{(1.60\times10^{-19}C)^2}{(5.3\times10^{-11}m)^2} = 0.82\times10^{-7}N$$

وباستعمال قانون نيوتن للجذب نجد ان:

$$F_g = G\frac{m_1m_2}{r^2} = \left(6.7\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(9.11\times10^{-31}kg)(1.67\times10^{-27}kg)}{(5.3\times10^{-11}m)^2}$$
$$= 3.62\times10^{-47}N$$

النسبة بين القوتين: $\frac{F_e}{F_g} = 2.26\times10^{39}$

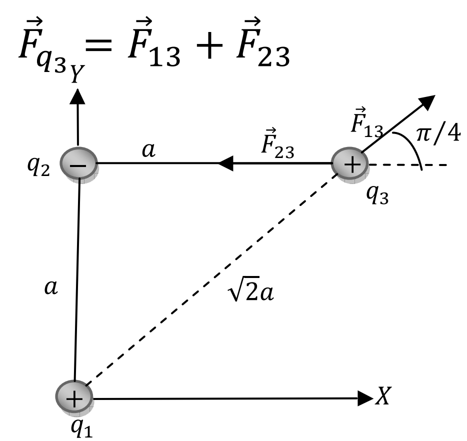
إن القوة التجاذب الكتلي و أيضا قوة الثقالية مهملة أمام القوة الكهربائية.

مثال 2: محصلة القوى المؤثرة على شحنة، و الناتجة عن شحنتين.

وضعت ثلاث شحنات نقطية عند أركان مثلث قائم و متساوي الساقين $q_1 = q_3 = 5.0\mu C$ و $q_2 = -2.0\mu C$ و $a = 0.1m$. اوجد محصلة القوة المبذولة عند q_3.

القوة المحصلة على q_3 هي المجموع الشعاعي للقوى الناتجة عن q_1 و q_2:

$$\vec{F}_{q_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$



اذا استعملنا المعلم الديكارتي OXY نجد:

$$\vec{F}_{13} = F_{13}\cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + F_{13}\sin\frac{\pi}{4}\vec{j}$$
$$\vec{F}_{23} = -F_{23}\vec{i}$$

$$\vec{F}_{q_3} = \left(F_{13}\cos\frac{\pi}{4} - F_{23}\right)\vec{i} + F_{13}\sin\frac{\pi}{4}\vec{j}$$

حساب طويلات الأشعة:

$$F_{13} = k\frac{|q_1||q_3|}{\left(\sqrt{2}a\right)^2} = \left(9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(5\times10^{-6}C)^2}{2(0.1m)^2} = 11.25N$$

$$F_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{a^2} = (9\times10^9)\frac{(5\times10^{-6})(2.0\times10^{-6})}{(0.1)^2} = 9N$$

$$\vec{F}_{q_3} = (7.95-9)\vec{i} + 7.95\vec{j} = -1.05\vec{i} + 7.95\vec{j}$$

ملاحظات:

- ✓ يصح قانون كولوم (1) فقط على الشحنات الساكنة أو التي في حالة حركة بطيئة.
- ✓ لا توجد بعد دلائل تجريبية تؤكد أو تنفي صحة تطبيق قانون كولوم في المسافات الكبيرة (الفلكية)، ولا في المسافات المجهرية $(10^{-14}\mathrm{m})$، لكن توحي بأنه يمكن تطبيقه.

4.1 الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية

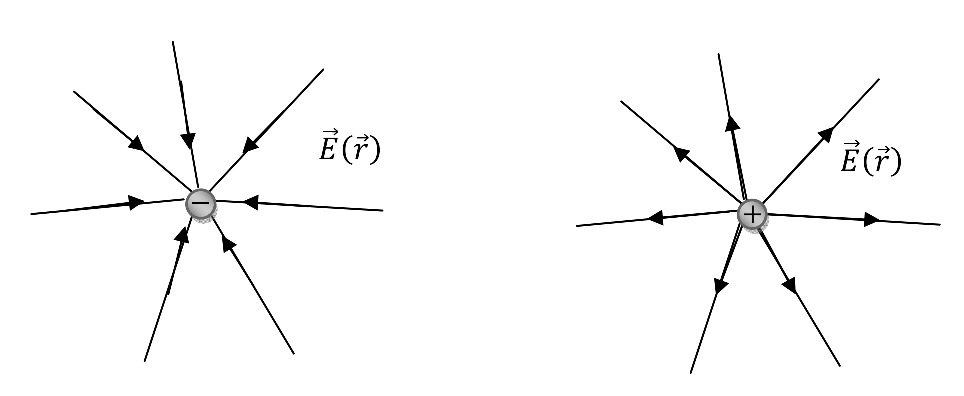
إن القوة الكهربائية، حسب قانون كولوم، الناتجة عن الشحنة النقطية q و التي تؤثر على شحنة نقطية أخرى q' تبعد عنها مسافة r هي:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\vec{r} = q'\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) = q'\vec{E}$$

نلاحظ أن القوة الكهربائية $\vec{F}$ تتعلق بمقدار شعاعي $\vec{E}$، يتعلق بدوره بـ q فقط يدعى الحقل الكهربائي(*champ électrique*)، و هو يميز حيزا من الفضاء المحيط بالشحنة q، و يعتبر الأداة التي تنقل تأثير q إلى أي موضع من الفضاء، سواء كانت به شحنة أو لا، فان وجدت في الموضع شحنة تولد عندها قوة كولوم. دور الشحنة q' هو تحسس الحقل الناتج عن q عندها دون ان يكون لها دور في إنشائه. و منه فالحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية q عند النقطة M التي تبعد عنها مسافة r يعطى:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u} \qquad (2)$$

- ✓ إذا كانت $q > 0$ فإن للحقل الكهربائي $\vec{E}$ نفس اتجاه $\vec{r}$.
- ✓ إذا كانت $q < 0$ فإن للحقل الكهربائي $\vec{E}$ عكس اتجاه $\vec{r}$.
- ✓ يتجه الحقل الكهربائي نحو الشحنات السالبة و يصدر عن الشحنات الموجبة.



- ✓ وحدة الحقل الكهربائي في النظام الدولي SI هي NC^{-1} (سنرى فيما بعد أنه يمكن استعمال وحدة أخرى هي Vm^{-1}).
- ✓ يؤدي الحقل الكهربائي دورا مماثلا للذي يؤديه حقل الجاذبية الأرضية الذي ينقل أثر الأرض (الجذب) إلى الأجسام ليولد عندها قوة الثقل: $\vec{p} = m\vec{g}(\vec{r})$.

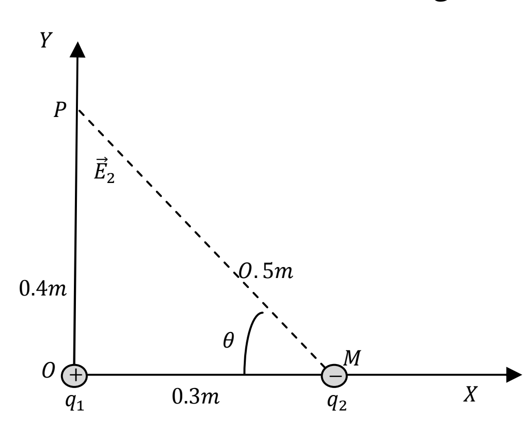
5.1 الكمون الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية

نعرف الكمون الكهربائي (*potentiel électrique*) الناتج عن شحنة نقطية q عند النقطة M التي تبعد عنها مسافة r بـ:

$$V(M) = k\frac{q}{r} + c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + c \qquad (3)$$

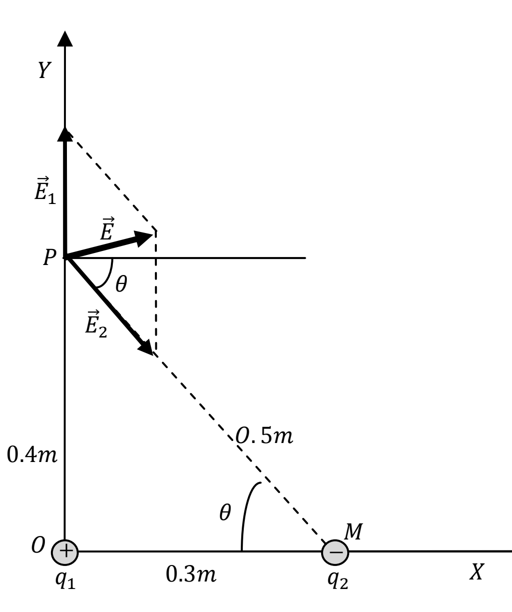
يحدد الثابت c وفقا لمرجع الكمون. فمثلا يكون $c = 0$ عندما $V(\infty) = 0$.

مثال 3: الحقل و الكمون الكهربائيان الناتجان عن شحنتين.



في المعلم OXY، وضعت الشحنة $q_1 = 7\mu C$ عند النقطة $(0,0)$، و وضعت الشحنة $q_2 = -5\mu C$ عند النقطة M ذات الإحداثيات $(0.3,0)m$، أنظر الشكل.

أوجد الحقل و الكمون الكهربائيين في النقطة P ذات الإحداثيات $(0,0.4)\text{m}$.



الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنتين في الموضع P:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P)$$

في المعلم OXY لدينا:

$$\vec{E}_1(P) = E_1\vec{j}$$
$$\vec{E}_2(P) = E_2\cos\theta\,\vec{\imath} - E_2\sin\theta\,\vec{j}$$

حيث:

$$\cos\theta = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5}$$
$$\sin\theta = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$$

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2} = \left(9\times 10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(7\times 10^{-6}C)}{(0.4m)^2} = 3.9\times 10^5\,N/C$$

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{\left|\overrightarrow{MP}\right|^2} = (9\times 10^9)\frac{(5\times 10^{-6})}{(0.5)^2} = 1.8\times 10^5\,N/C$$

$$\vec{E}_1(P) = 3.9\times 10^5\vec{j}$$

$$\vec{E}_2(P) = 1.8\times 10^5\left(\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}\right) = 1.08\times 10^5\vec{i} - 1.44\times 10^5\vec{j}$$

$$\vec{E}(P) = 1.08\times 10^5\vec{i} + 2.46\times 10^5\vec{j}$$

الكمون الكهربائي الناتج عن الشحنتين في الموضع P:

$$V(P) = V_1(P) + V_2(P)$$

حيث:

$$V_1(P) = k\frac{q_1}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \left(9\times 10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(7\times 10^{-6}C)}{0.4m} = 1.58\times 10^5 V$$

$$V_2(P) = k\frac{q_2}{\left|\overrightarrow{MP}\right|} = \left(9\times 10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(-5\times 10^{-6}C)}{0.5m} = -0.9\times 10^5 V$$

$$V(P) = 1.58\times 10^5 - 0.9\times 10^5 = 0.68\times 10^5 V$$

6.1 العلاقة بين الحقل و الكمون الكهربائيين

لنحسب تجوال (*circulation*) الشعاع $\vec{E}$ عبر عنصر الطول $d\vec{r}$:

$$\vec{E}.d\vec{r} = k\frac{q}{r^3}(\vec{r}.d\vec{r}) = k\frac{q}{r^2}dr \qquad (4)$$

بمفاضلة المعادلة (3) بالنسبة للمتغير r:

$$\frac{dV}{dr} = -k\frac{q}{r^2} \Longrightarrow dV = -k\frac{q}{r^2}dr \qquad (5)$$

بمقارنة العلاقتين (4) و (5) نجد العلاقة :

$$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \qquad (6)$$

تجوال الحقل الكهروستاتيكي على مسار من النقطة A إلى النقطة B:

$$\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = -\int_A^B dV \; = V(A) - V(B)$$

ملاحظات:

- ✓ هذا التجوال محفوظ لا يتعلق بالمسار المتبع.
- ✓ تجوال الحقل الكهروستاتيكي عبر مسار مغلق معدوم.
- ✓ من أجل $\vec{E}.d\vec{r} > 0$ لدينا $V(A) > V(B)$، يعني أن اتجاه خطوط الحقل في اتجاه تناقص الكمون.

$\vec{E}$

A $\quad d\vec{r} \quad$ B

$V(A)$ $\qquad$ $V(B) < V(A)$

باستعمال الإحداثيات الديكارتية في المعادلة (6) نجد:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \; = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

بالمقارنة بين المعادلتين السابقتين نجد:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \quad \Longrightarrow \; \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \qquad (7)$$

وحدة الكمون في النظام الدولي SI هي: $J.C^{-1}$ أو باختصار الفولط (V). أشرنا سابقا أنه يمكن تعويض وحدة الحقل بـ: Vm^{-1} .

7.1 تعميم علاقات الحقل و الكمون الكهربائيين

حالة التوزيع المتقطع للشحنات(*distribution discrète de charges*): ليكن لدينا N شحنة نقطية q_1، q_2، ...، q_N و المطلوب حساب الحقل و الكمون الناتجين عن هذه الشحنات في النقطة M.

حسب قانون التراكب:

$$\vec{E}(M)=\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\,(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

$$V(M)=\sum_{i=1}^{N}V_i\,(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

حالة التوزيع المستمر للشحنات (*distribution continue de charges*): في هذه الحالة نجزىء الشحنة q الموزعة على كافة الجسم إلى عناصر تفاضلية dq ثم نجمع (نكامل) تأثيرها فنحصل:

$$d\vec{E}=k\frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{E}(M)=\int d\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\quad(9)$$

$$V(M)=\int dV(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}\quad(10)$$

يمكن للشحنة في الجسم أن تتوزع في ثلاثة أشكال:

التوزيع الخطي: نعرف الكثافة الخطية λ (*densité linéique*)، وحدتها في النظام الدولي cm^{-1}، و تمثل كمية الشحنة dq الموضوعة في وحدة الطول dl، أي:

$$dq=\lambda dl$$

يكتب الحقل و الكمون في حالة هذا التوزيع:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r}$$

حيث L الطول الكلي للجسم.

في حالة الكثافة الخطية المنتظمة :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{L} = \text{ثابت}$$

التوزيع السطحي: نعرف الكثافة السطحية σ (*densité surfacique*)، وحدتها في النظام الدولي cm^{-2} ، وتمثل كمية الشحنة dq الموضوعة في وحدة السطح dS، أي :

$$dq = \sigma dS$$

يكتب الحقل و الكمون في حالة هذا التوزيع :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

حيث S السطح الكلي للجسم.

في حالة الكثافة السطحية المنتظمة :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{q}{S} = \text{ثابت}$$

التوزيع الحجمي: نعرف الكثافة الحجمية ρ (*densité volumique*)، وحدتها في النظام الدولي cm^{-3} ، وتمثل كمية الشحنة dq الموضوعة في وحدة الحجم dv ، أي:

$$dq = \rho dv$$

يكتب الحقل و الكمون في حالة هذا التوزيع:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho dv}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho dv}{r}$$

حيث v الحجم الكلي للجسم.

في حالة الكثافة الحجمية المنتظمة :

$$\rho = \frac{dq}{dv} = \frac{q}{v} = \text{ثابت}$$

مثال 4: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن سلك لانهائي الطول.

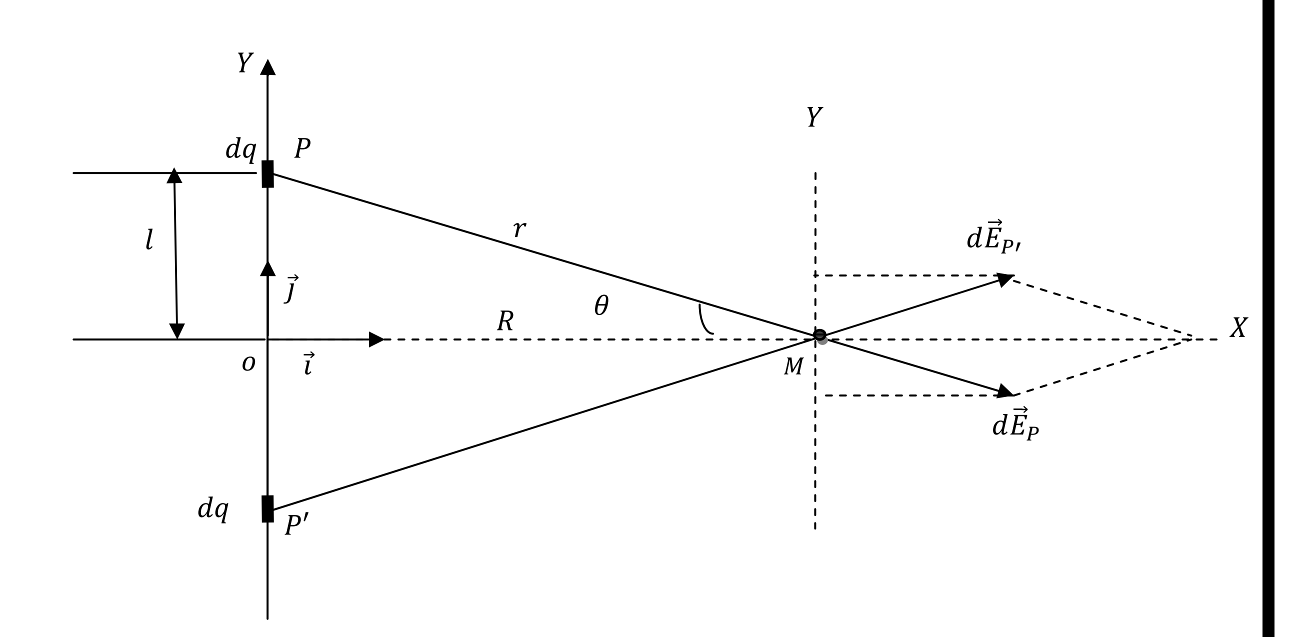
الشحنة موزعة بكثافة طولية منتظمة λ على طول سلك لانهائي الطول. المطلوب حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن هذا التوزيع في نقطة M من الفضاء تبعد مسافة R عن السلك.

دائما قبل الخوض في الحسابات نناقش موضوع طبيعة التوزيع الشحني هل يتسم بالتناظر أو لا، حيث يسمح لنا تناظر الشحنة باختصار الحسابات.

في هذا المثال و بفعل التناظر فإن الحقل الكهربائي سيكون له مركبة وحيدة على المحور $0X$:

$$\vec{E} = E_x\vec{\imath}$$

نقسم السلك إلى عناصر متناهية في الصغر dl، تحمل كل منها شحنة عنصرية : $dq = \lambda dl$



و الحقل الكهربائي العنصري $d\vec{E}_P$ الناتج عن هذه الشحنة العنصرية واقع على الحامل PM كما هو موضح في الشكل، فنجد أن لديه مركبتين:

$$d\vec{E}_P = dE_x\vec{\imath} + dE_y\vec{\jmath} = dE_P \cos\theta\, \vec{\imath} - dE_P \sin\theta\, \vec{\jmath}$$

حيث:

$$dE_P = k\frac{\lambda dl}{r^2}$$

كما ذكرنا سابقا، فإنه بفعل التناظر يكون الحقل الكلي الناتج على السلك له مركبة وحيدة على المحور OX لذلك لا داعي لحساب تكامل مسقط الحقل الكهربائي العنصري على المحور OY. يبقى فقط حساب تكامل المسقط على المحور OX:

$$dE_x = dE_P \cos\theta = k\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\theta \qquad (1')$$

لنكامل هذه المعادلة على كامل السلك حتى نحصل على الحقل الكلي في النقطة M، لذلك من الضروري اختيار المتغير جيدا. لدينا عده امكانيات للمتغيرات: l أو θ، و أسهل حالة هي اختيار θ كمتغير.

من الشكل لدينا:

$$l = R\tan\theta \Longrightarrow \frac{dl}{d\theta} = \frac{R}{\cos^2\theta} \Longrightarrow dl = \frac{R}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$\cos\theta = \frac{R}{r} \Longrightarrow r = \frac{R}{\cos\theta}$$

نعوض هذه المعطيات في المعادلة $(1')$ فنحصل على:

$$dE_x = k\frac{\lambda\frac{R}{\cos^2\theta}d\theta}{\left(\frac{R}{\cos\theta}\right)^2}\cos\theta = k\frac{\lambda}{R}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\, d\theta$$

نكامل المعادلة السابقة على كامل السلك، أي من $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إلى $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{\imath}$$

بالنسبة إلى حساب الكمون بالطريقة المباشرة فإن كل عنصر من الشحنة dq يعطي كمونًا عنصريًا dV عند النقطة M:

$$dV(M) = k\frac{dq}{r} = k\frac{\lambda dl}{r}$$

لحساب التكامل يجب الاختيار الجيد للمتغير الذي سيجرى عليه التكامل، فقد نحصل باختيارنا على

تكاملات صعبة الحل. في هذا الجزء من التمرين سنختار dl عنصر تفاضل، و على الطالب أن يجرب الحساب باختيار عنصر التفاضل $d\theta$، و سيجد أنه من الصعب حساب التكامل:

$$dV(M) = k\frac{\lambda dl}{\sqrt{l^2+R^2}} \quad ; \quad r = \sqrt{l^2+R^2}$$

لحساب الكمون الكلي الناتج عن السلك يجب أن نكامل على كامل السلك أي من $-\infty$ إلى $+\infty$، و هذا صعب. لذلك بما أن التكامل السابق دالة زوجية نقسم التكامل إلى قسمين، و نكامل من 0 إلى a، ثم نحسب النتيجة عندما تؤول a إلى المالانهاية:

$$V(M) = 2k\lambda\int_0^a \frac{dl}{\sqrt{l^2+R^2}} = 2k\lambda\ \ln\left|l+\sqrt{l^2+R^2}\right|\Big|_0^a$$
$$= 2k\lambda\ \left[\ln\left|a+\sqrt{a^2+R^2}\right| - \ln \mathrm{R}\right]$$

نستعمل العلاقة $q = \lambda l$ و نحسب النهاية عندما $a \to \infty$:

$$\lim_{a\to\infty} 2k\lambda\ \left[\ln\left|a+\sqrt{a^2+R^2}\right| - \ln \mathrm{R}\right]$$
$$= \lim_{a\to\infty} 2k\frac{q}{a}\ \left[\ln\left|a+\sqrt{a^2+R^2}\right| - \ln \mathrm{R}\right] = -2k\lambda \ln \mathrm{R}$$

$$V(M) = -2k\lambda \ln \mathrm{R} + C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + C$$

حيث C ثابت.

نستطيع أن نصل إلى العلاقة السابقة بطريقة الاستنتاج باستعمال العلاقة (5) في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath}$$
$$-\frac{dV}{dx} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \Longrightarrow dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx$$
$$\int dV = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx \Longrightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + C$$

و عندما $x = R$:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + C$$

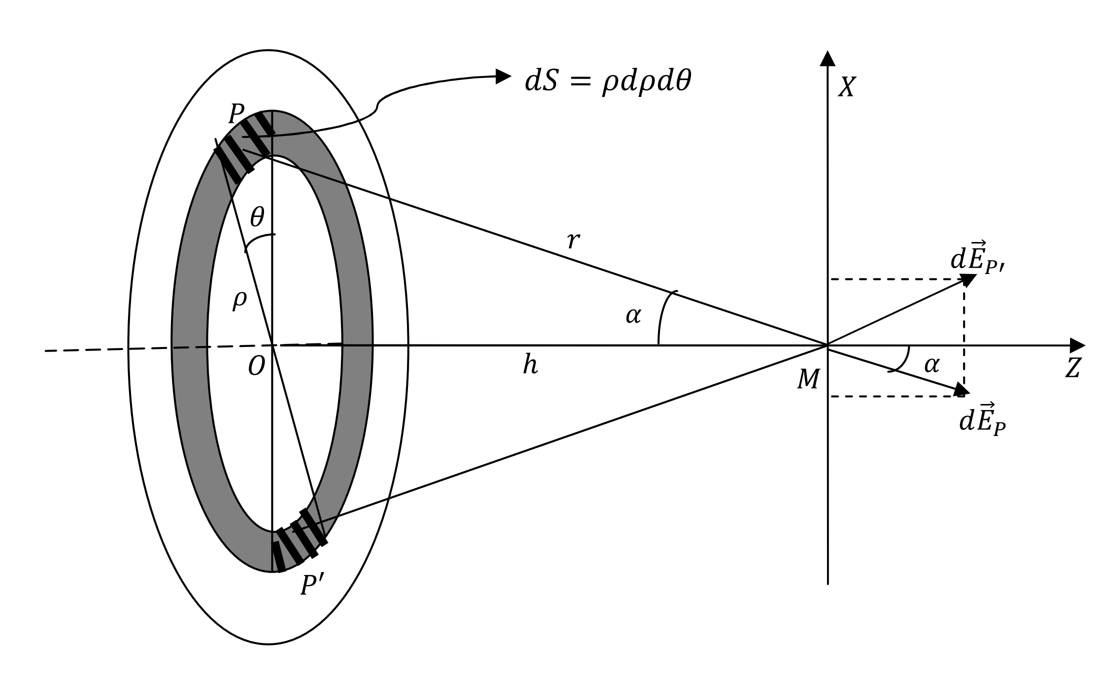
مثال 5: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن قرص.

قرص نصف قطره R مشحون بكثافة سطحية $(\sigma > 0)$ منتظمة و مساحته $S = \pi R^2$.

المطلوب: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن هذا التوزيع في نقطة M من محور القرص OZ.

نقسم القرص إلى سطوح تفاضلية سطحية dS تحتوي على شحنة تفاضلية dq، حيث:

$$dq = \sigma dS = \sigma \rho d\rho d\theta$$



مركبات الحقل العنصري:

$$d\vec{E}_P = -dE_x \vec{i} + dE_z \vec{k} = -dE_P \sin\alpha \, \vec{i} + dE_P \cos\alpha \, \vec{k}$$

$$dE_P = k \frac{dq}{r^2} = k \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{r^2}$$

بطريقة التمرين السابق نفسها، نلاحظ أن هناك تناظرًا للشحنة، يمكن استغلاله، حيث نجد أن الحقل الكهربائي الكلي له مركبة وحيدة على المحور OZ، فلا داعي لحساب مسقط الحقل على المحاور المتعامدة مع OZ:

$$dE_z = dE_P \cos\alpha = k \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{r^2} \cos\alpha$$

لدينا: θ تتغير من 0 إلى 2π، و ρ من 0 إلى R، و من الشكل نجد:

$$\cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \; ; \qquad r^2 = \rho^2 + h^2$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + h^2)} \frac{h}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

نكامل:

$$E_z = \frac{\sigma h}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}\right)_0^R$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right)\vec{k} \qquad (11)$$

بالنسبة إلى حساب الكمون في النقطة M:

$$dV = k\frac{dq}{r} = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{r} = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}$$

نكامل:

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}\int_0^{2\pi} d\theta + C$$

حيث C ثابت:

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{h^2 + R^2} - h\right) + C \qquad (12)$$

نستطيع أن نصل إلى العلاقة السابقة بطريقة الاستنتاج باستعمال العلاقة (5) في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)\vec{k}$$

بمقارنة طرفي المعادلة السابقة:

$$-\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

$$dV = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{z+R^2}}\right)dh \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right) + C$$

عندما $z = h$:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{h^2+R^2} - h\right) + C$$

ملاحظة: التكاملات موجودة في الملحق الأول.

مثال 6: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن مستوٍ لانهائي.

نعتبره كأنه قرص ذو نصف قطر لانهائي. باستعمال العلاقة (11) و (12) عندما $R \longrightarrow \infty$:

$$\vec{E}(M) = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

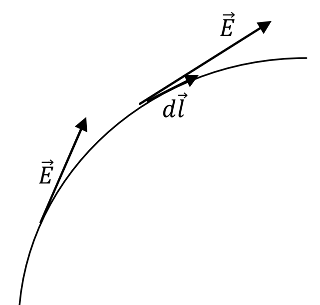
$$V(M) = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}h + C$$

الإشارة $\pm$ لأنه من الممكن أن تكون النقطة M تحت المستوى أو فوقه.

8.1 طبوغرافية الفضاء الكهربائي

تعتمد طبوغرافيا (*topographie*) الفضاء الكهربائي على خطوط الحقل و سطوح تساوي الكمون، و هي طريقة أخرى لوصف الظواهر الكهربائية بيانيا، و حساب الحقل و الكمون الكهربائيين بهذه الطريقة تقريبي. سنعرِّف بعض المصطلحات المستعملة في طبوغرافيا الفضاء الكهربائي:

خط الحقل (***ligne de champ***): هو منحنى يكون مماسيا في أية نقطة من نقاطه لحامل الحقل في تلك النقطة. تتميز خطوط الحقل بأنها:



- مستمرة، لا تتقاطع فيما بينها أبدا.
- عمودية على سطوح تساوي الكمون.
- تخرج من الشحنات الموجبة لتنتهي إلى الشحنات السالبة، أو إلى المالانهاية.

- يتناسب عددها في وحدة المساحة طردا مع شدة الحقل، فكلما زادت شدة الحقل تقاربت الخطوط أكثر، و العكس صحيح.
- نحصل على المعادلة التحليلية لخطوط الحقل من كون أن عنصر الطول من خط الحقل $d\vec{l}$ يكون محمولاً على المماس، فهو يوازي شعاع الحقل، أي:

$$\vec{E}//d\vec{l} \Longrightarrow \vec{E} \times d\vec{l} = \vec{0}$$

و تعطى معادلة خط الحقل في الإحداثيات الديكارتية:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

سطح تساوي الكمون (***surface équipotentielle***): هو السطح الذي يتساوى الكمون في جميع نقاطه، و تمتاز سطوح تساوي الكمون بأنها عمودية على خطوط الحقل، و المعادلة التحليلية لسطوح تساوي الكمون تستخرج من:

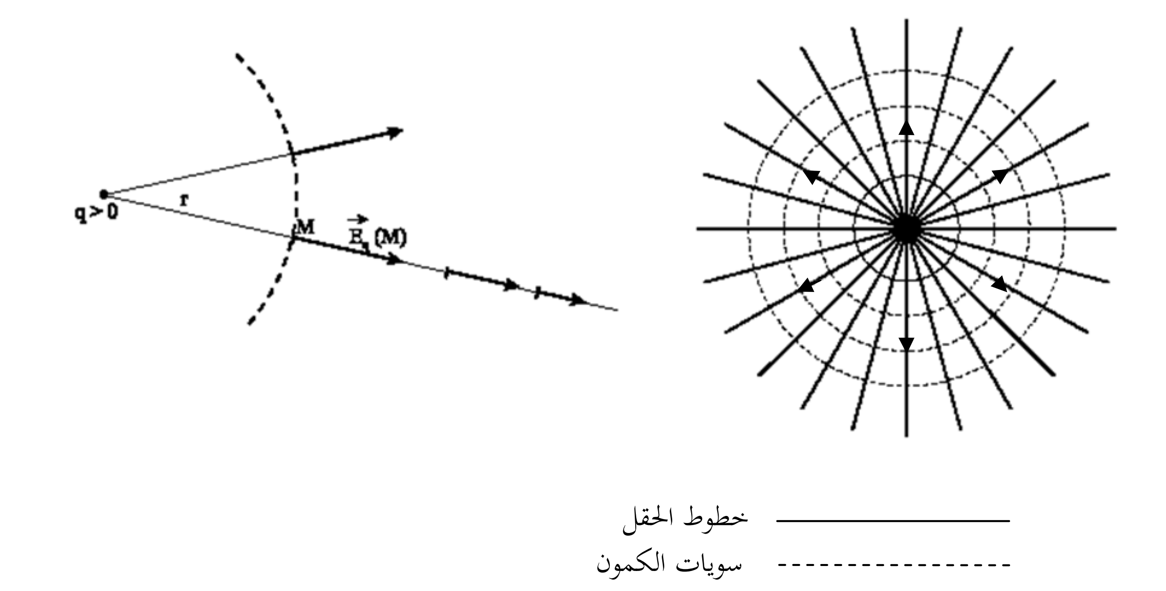
$$V(r) = cst = \text{ثابت}$$

تتقارب سطوح تساوي الكمون عند الانتقال من منطقة يكون فيها الحقل أقل شدة إلى منطقة أخرى يكون فيها الحقل أكثر شدة.

مثال: خطوط الحقل وسطوح تساوي الكمون لشحنة نقطية.

$$V(r) = \frac{kq}{r} = cst = V_0 \Longrightarrow r = \frac{kq}{V_0} = \text{ثابت}$$

و هي معادلة سطح كرة مركزها الشحنة النقطية.



9.1 الطاقة الداخلية (الطاقة الكهروستاتيكية)

الطاقة الكامنة لشحنة نقطية موضوعة في حقل شحنات أخرى: لتكن شحنة نقطية q موجودة عند النقطة M خاضعة إلى كمون كهربائي$V(M)$ ناتج عن شحنة أخرى تساوي عمل القوة الكهروستاتيكية لانتقال q من ما لانهاية حيث الكمون $V(\infty)=0$ إلى النقطة M:

$$dE_p = -dW = -\vec{F}.d\vec{r} = -q\vec{E}.d\vec{r}$$

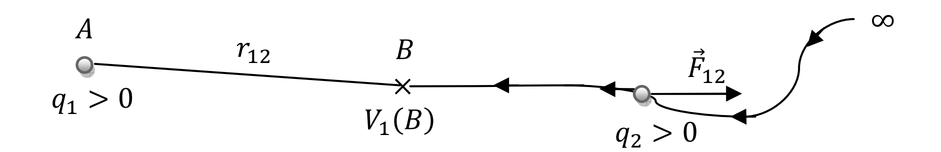
$$\int_{\infty}^{M} dE_p = E_p(M) - E_p(\infty) = -\int_{\infty}^{M} q(-dV) = q\int_{V(\infty)}^{V(M)} dV = q\big(V(M) - V(\infty)\big)$$

و يعَّرف الكمون كطاقة كامنة لوحدة الشحنات الموجبة الموضوعة في هذه النقطة:

$$E_p(M) = qV(M) \qquad (8)$$

نظام من شحنتين نقطتين(*système de deux charges*): لتكن الشحنةq_1 موجودة في ما لانهاية في الجهة الموجبة مثلا و شحنة ثانية q_2 موجودة في مالا نهاية من الجهة السالبة. الشحنتان لا تتأثران بأي قوة لأنهما بعيدتان جدا. سنقوم بوضع الشحنتين q_1 و q_2 في النقطتين A و B على الترتيب، تفصلهما مسافة r_{12}:

- ✓ سنأتي أولا بالشحنة q_1 إلى النقطة A، خلال عملية الانتقال نبذل عملاً يساوي الصفر لأن الشحنة لا تخضع إلى أي قوة.
- ✓ ثم نأتي بالشحنة q_2 إلى النقطة B، سنبذل عملاً ضد القوة الكهربائية بين الشحنتين حيث تجد الشحنة q_2 نفسها خاضعة إلى كمون الشحنة q_1.



يسمى هذا العمل المبذول بالطاقة الداخلية لجمع الشحنتين، حيث تساوي الطاقة الكامنة للشحنة الثانية في وجود كمون ناتج عن الشحنة الأولى $V_1(B)$، أو الطاقة الكامنة للشحنة الأولى في الكمون الناتج عن الشحنة الثانية $V_2(A)$، أي:

$$U = E_p = q_1V_2(A) = q_2V_1(B) = \frac{1}{2}\big(q_1V_2(A) + q_2V_1(B)\big) = \frac{kq_1q_2}{r_{12}}$$

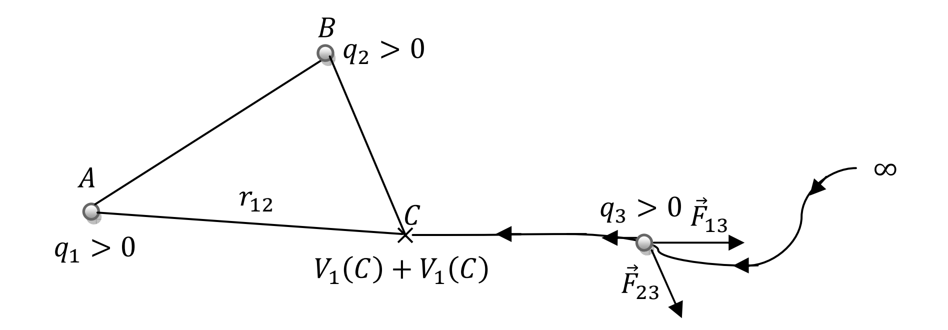
نظام من ثلاث شحنات: لتعيين الطاقة الكامنة لجملة نظام من ثلاث شحنات q_1، q_2 و q_3 نتبع الطريقة السابقة نفسها، حيث نفترض دائما أن الشحنات موجودة في الما لانهاية، حيث لا يوجد أي تأثير بينها.

- ✓ سنأتي أولا بالشحنة q_1 إلى النقطة A، خلال عملية الانتقال نبذل عمل يساوي الصفر لأن الشحنة لا تخضع إلى أي قوة: $W_{\infty\to A} = 0$.
- ✓ نأتي بالشحنة q_2 إلى النقطة B، الشحنة q_2 خاضعة إلى كمون الشحنة q_1 فسوف نبذل عملاً:

$$W_{\infty\to B} = q_2V_1(B)$$

- ✓ نأتي بالشحنة q_3 إلى النقطة C، الشحنة q_3 تخضع إلى كمون ناتج عن الشحنة q_1 و كمون ناتج عن الشحنة q_2، العمل المبذول في هذه العملية:

$$W_{\infty\to C} = q_3V_1(C) + q_3V_2(C)$$



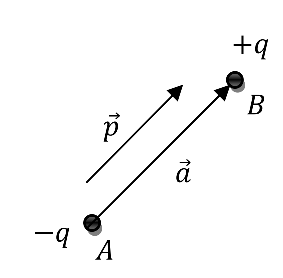
فالطاقة الكامنة الكلية (الطاقة الداخلية):

$$U = E_p = q_3V_1(C) + q_3V_2(C) + q_2V_1(B) = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

تعميم من أجل نظامٍ من N شحنة نقطية (***système de N charges ponctuelles***): الطاقة الداخلية (الطاقة الكامنة الكلية) لنظام من N شحنة نقطية يُعطى بـ:

$$U = E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1, i\neq j}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{kq_iq_j}{r_{ij}} \qquad (13)$$

10.1 ثنائي القطب الكهربائي (الكهروستاتيكي)

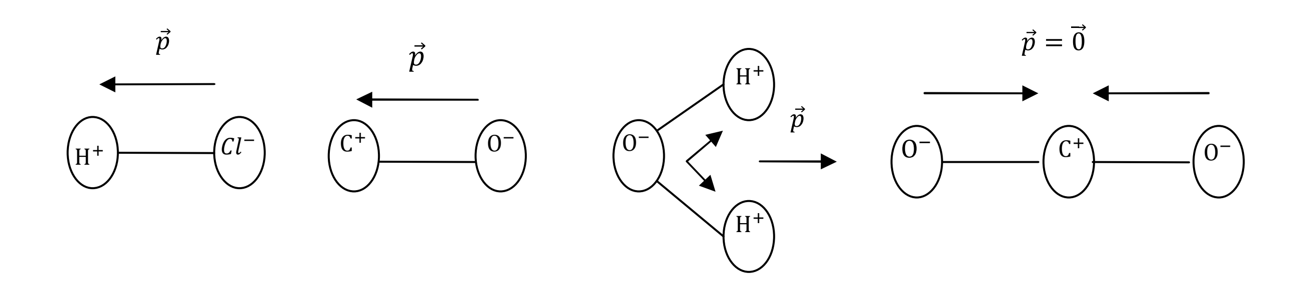


يتكون ثنائي القطب (*dipôle électrostatique*) من شحنتين متساويتين في القيمة و مختلفتين في الإشارة $+q$ و $-q$، و تبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة a. نعرف العزم الكهربائي لثنائي القطب (*moment dipolaire électrique*):

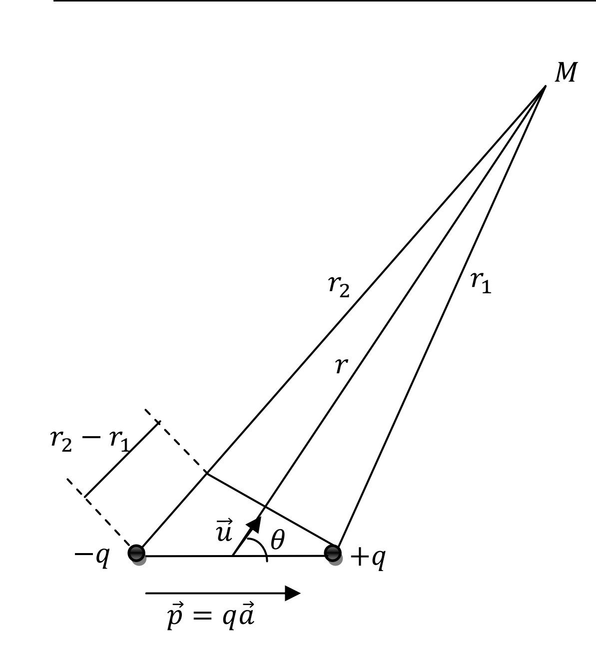
$$\vec{p} = q\vec{a} = q\overrightarrow{AB} \qquad (14)$$

دراسة ثنائي القطب لها أهمية كبرى في دراسة الذرات أو الجزيئات الموضوعة في حقل كهربائي خارجي، حيث ينزاح مركز ثقل الذرات بمسافة عن النواة، فتستقطب و تسلك سلوك ثنائي القطب.

بعض الجزيئات في الطبيعة، تظهر في غياب الحقل الكهربائي الخارجي كأنها أقطاب دائمة تدعى جزيئات قطبية مثل: HCl، CO، H_2O، CO_2.



11.1 الكمون و الحقل الكهربائيان الناشئان عن ثنائي القطب على مسافة بعيدة



يكتب الكمون الناشئ عن ثنائي القطب في النقطة M بعيدة جدا أمام المسافة بين الشحنتين a :

$$V(M) = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

بما ان $a \ll r$ يمكن استعمال بعض التقريبات:

$$r_1 r_2 \simeq r^2$$
$$r_2 - r_1 \simeq a\cos\theta$$

فتصبح المعادلة السابقة كما يلي:

$$V(M) = \frac{kqa\cos\theta}{r^2} = \frac{kp\cos\theta}{r^2} = \frac{k\vec{p}.\vec{u}}{r^2} = \frac{k\vec{p}.\vec{r}}{r^3} \qquad (15)$$

نستعمل الإحداثيات القطبية لاستنتاج مركبات الحقل الكهربائي:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Longrightarrow \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{k2p\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{kp\sin\theta}{r^3} \end{cases} \qquad (16)$$

إيجاد معادلة خطوط الحقل:

$$\vec{E} \times d\vec{l} = \vec{0}$$

حيث $d\vec{l}$ عنصر تفاضل من خط الحقل يكتب في الإحداثيات القطبية:

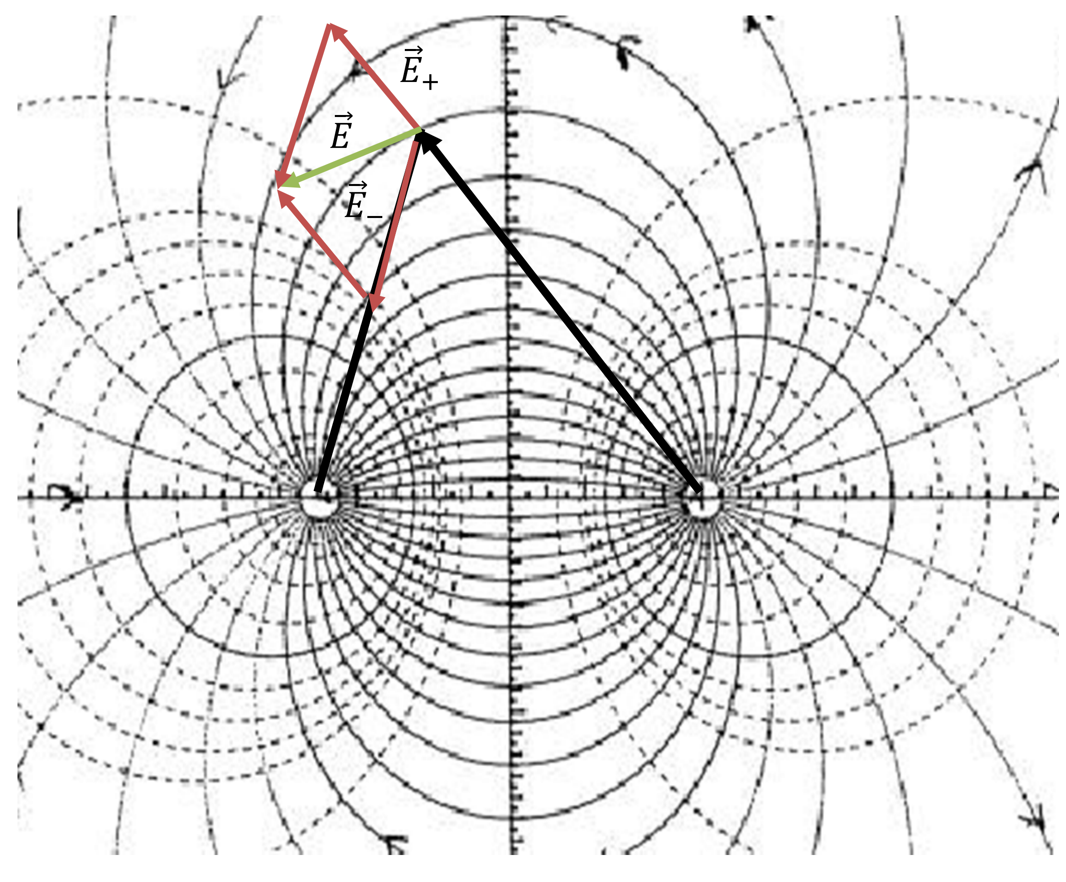
$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta \Longrightarrow \vec{E} \times d\vec{l} = (E_r rd\theta - E_\theta dr)\vec{u}_z = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \frac{k2p\cos\theta}{r^3} rd\theta = \frac{kp\sin\theta}{r^3} dr \Longrightarrow \frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta = 2\frac{d\sin\theta}{\sin\theta}$$

حل هذه المعادلة التفاضلية هو: $r = c\sin^2\theta$

بالنسبة لخطوط سويات الكمون:

$$V(r,\theta) = cst = V_0 \Longrightarrow \frac{kp\cos\theta}{r^2} = V_0 \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{kp}{V_0}}\sqrt{\cos\theta}$$



خط الحقل

سوية الكمون

12.1 ثنائي القطب الموضوع في حقل كهربائي خارجي منتظم

ليكن ثنائي القطب في وجود حقل كهربائي خارجي منتظم $\vec{E}_{\text{ext}}$. تتأثر شحنتا ثنائي القطب بمزدوجة (couple) $(\vec{F}^{+},\vec{F}^{-})$ تسعى لتدويره حول مركزه $'O'$ إلى أن يشغل موضع التوازن، عزم هذه المزدوجة حول المركز $'O'$:

$$\vec{L}=\vec{L}^{+}+\vec{L}^{-}=\frac{\vec{a}}{2}\times\vec{F}^{+}-\frac{\vec{a}}{2}\times\vec{F}^{-}$$

$$=\frac{\vec{a}}{2}\times\left(q\vec{E}_{ext}+q\vec{E}_{ext}\right)=q\vec{a}\times\vec{E}_{ext}$$

$$\vec{L}=\vec{p}\times\vec{E}_{ext} \qquad (17)$$

يتوازن ثنائي القطب من أجل $\vec{L}=\vec{0}$، أي عندما يكون: $\vec{p}\ //\ \vec{E}_{ext}$.

$E_p > 0$ وضع توازن مستقر (stable)

$E_p > 0$ وضع توازن غير مستقر (instable)

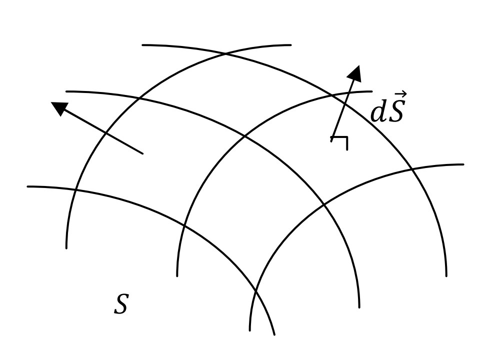
لنحسب الطاقة الكامنة الكهروستاتيكية للتفاعل بين ثنائي القطب و الحقل الخارجي (لا نقصد به الطاقة بين الشحنة $+q$ و $-q$ لثنائي القطب نفسه) نعتبر ثنائي القطب كنظام واحد مكون من شحنة $-$ في النقطة A و $+q$ في النقطة B:

$$E_p=-qV_{ext}(A)+qV_{ext}(B)=q\big(V_{ext}(B)-V_{ext}(A)\big)=q\int_A^B dV$$

$$=-q\int_A^B \vec{E}_{ext}\,.\,d\vec{r}=-q\vec{E}_{ext}.\overrightarrow{AB}=-q\overrightarrow{AB}.\vec{E}_{ext}$$

$$E_p=-\vec{p}.\vec{E}_{ext} \qquad (18)$$

13.1 تدفق الحقل الكهربائي – نظرية غوص *Gauss*



شعاع السطح (*vecteur surface*): ليكن dS عنصر السطح من السطح الكليS. نسمي شعاع السطح العنصري $d\vec{S}$ الشعاع الذي طويلته تساوي مساحة هذا العنصر dS و شعاع توجيهه عمودي على المساحة dS، يؤخذ نحو الخارج (تقعر السطح).

تدفق الحقل الكهربائي الساكن من خلال سطح S (*Flux du champ électrostatique à travers une surface*):

ليكن S سطحًا حقيقيًا أو تخيليًا، نسمي التدفق العنصري للحقل الكهربائي $\vec{E}$ من خلال السطح العنصري $d\vec{S}$، المقدار السلمي $d\phi$ حيث:

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S}$$

ويعطَى التدفق الكلي عبر كامل السطح S:

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{s}$$

نظرية غوص (*Théorème de Gauss*):

هي علاقة تربط بين التدفق الكهربائي عبر سطح مغلق و الشحنة التي يضمها هذا السطح، و تنص على: تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح مغلق S، يساوي المجموع الجبري للشحنات التي يحتويها هذا السطح $\sum Q_{int}$ مقسوما على السماحية في الفراغ ε_0.

$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (19)$$

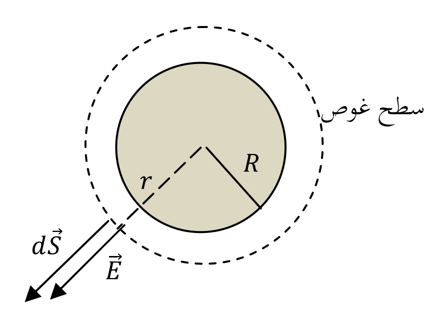
يدعى السطح S بسطح غوص.

ملاحظات:

تستعمل نظرية غوص في حساب شدة الحقل إذا اتسم توزيع الشحنات بالتماثل الكافي (التناظر). الاختيار الجيد لسطح غوص يكفل إنجاز التكامل على هذا السطح بسهولة. و ينبغي لهذا السطح أن يحقق الشروط التالية:

- ✓ سطح وهمي مغلق يشمل النقطة المراد حساب الحقل عندها.
- ✓ سطح يجعل الجداء السلمي $\vec{E}.d\vec{S}$ معلوما في أي نقطه منه، وبصفة خاصة يجعل الشعاع $\vec{E}$ مماسيا أو عموديا عليه.
- ✓ سطح يجعل شدة الحقل ثابتةً على امتداده.
- ✓ إذا لم توجد شحنات داخل سطح غوص أو المجموع الجبري للشحنات التي يحتويها هذا السطح يساوي الصفر، فإن تدفق الحقل الكهربائي معدومٌ.

مثال7: دراسة الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع كروي للشحنات (توزيع سطحي، توزيع حجمي) بطريقة غوص.



لنعتبر كرة نصف قطرها R تحمل شحنة Q موزعة بكثافة سطحية σ منتظمة. يكون الحقل الكهربائي في كل نقطة في الفضاء قطريا، يعتمد فقط على r مما يسمح لنا باختيار سطح غوص كرة نصف قطرها r و مركزها ينطبق على مركز الكرة المشحونة، فيكون التدفق عبر سطح غوص:

$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = E\oint_S dS = E4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

في حالة $r < R$: الشحنة داخل سطح غوص معدومة

$$E_1 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_1 = 0$$

- في حالة $r > R$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

حساب الكمون:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int E\, dr$$

- في حالة $r > R$

$$V_2(r) = -\int E_2\, dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

نستعمل الشروط الحدية:

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

- في حالة $r < R$

$$E_1 = 0 \Rightarrow V_1(r) = C_1$$

حسب استمرارية الكمون عند $r = R$ لدينا:

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

لنعتبر الآن كرة نصف قطرها R تحمل شحنة Q موزعة بكثافة حجمية ρ منتظمة. يكون الحقل الكهربائي في كل نقطة في الفضاء أيضا قطريا يعتمد فقط على r، مما يسمح لنا باختيار سطح غوص كرةً نصف قطرها r، و مركزها ينطبق على مركز الكرة المشحونة، فيكون التدفق عبر سطح غوص:

$$\phi = \oint_s \vec{E}.d\vec{s} = E\oint_s ds = E4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- في حالة $r < R$:

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

- في حالة $r > R$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

حساب الكمون:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int E\, dr$$

في حالة $r > R$

$$V_2(r) = -\int E_2\, dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

نستعمل الشروط الحدية :

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

في حالة $r < R$

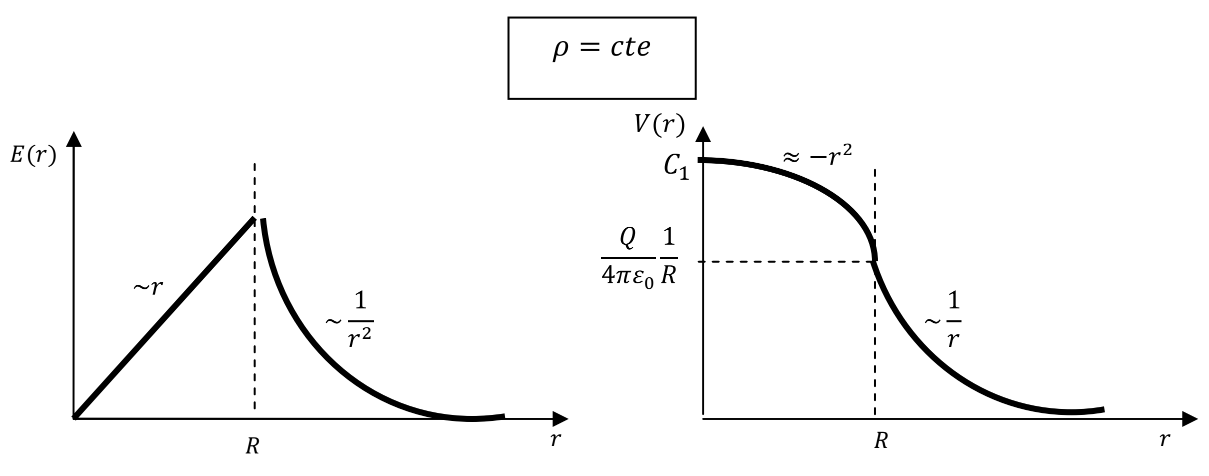
$$V_1(r) = -\int E_1\, dr = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1$$

حسب استمرارية الكمون عند $r = R$ لدينا:

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2$$

رسم منحنيات $E(r)$ و $V(r)$ بدلالة r:

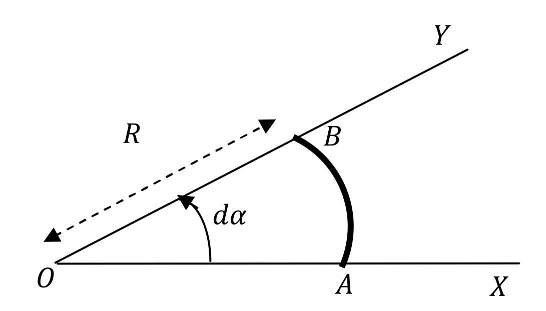
$\sigma = cte$



فقرة اختيارية 1 للفصل الأول

البرهان على نظرية غوص

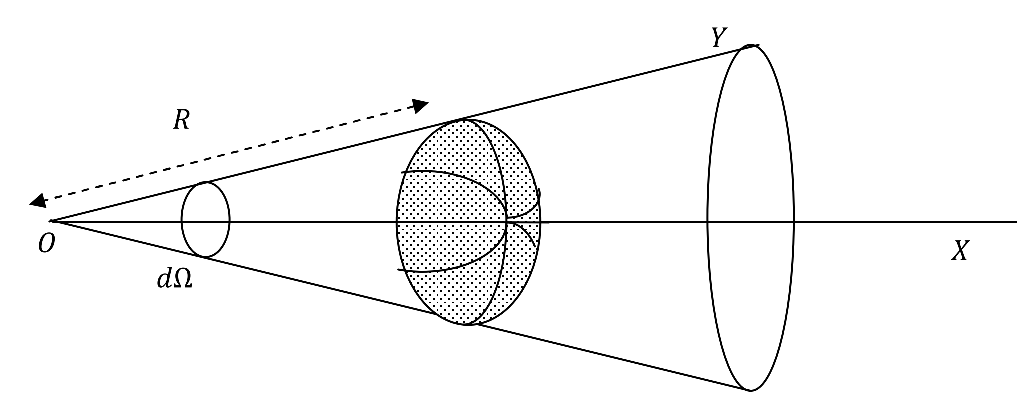
الزاوية المجسمة (***angle solide***): ليكن نصفا المستقيمين OX و OY، يحصران الزاوية $d\alpha$ الممثلة بالقوس $\widehat{AB}$ في الشكل الأول. تعرف زاوية المستوى $d\alpha$ بالعلاقة المعروفة التالية:



$$d\alpha = \frac{\widehat{AB}}{R}$$

زاوية المستوي بدون بعد و وحدتها في النظام الدولي هي الراديان (*radian*).

دوران المحور OY حول المحور يعطي شكل مخروط دوراني (*cône de révolution*)، ويتحول القوس $\widehat{AB}$ إلى قبة كروية مركزها O ونصف قطرها R.

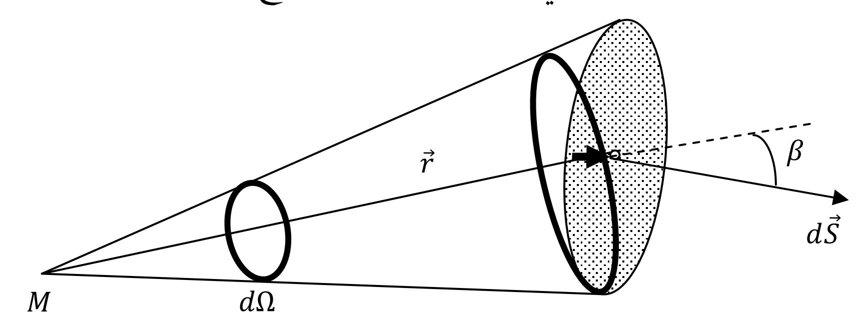


بالطريقة نفسها سوف نعرف الزاوية المجسمة، و هي الزاوية التي نرى من النقطة O القرص الذي يمثل مسقط القبة الكروية على المستوي العمودي على OX (الزاوية التي تمتد تحت عنصر سطح القبة)، و تعطى بالعلاقة التالية:

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

الزاوية المجسمة $d\Omega$ بدون بعد ايضا و وحدتها في النظام الدولي هي الستيراديان (*stéradian*)، و dSسطح القبة الكروية.

نعمم العلاقة السابقة، الزاوية المجسمة التي من أجلها نرى السطح dS من النقطة M:



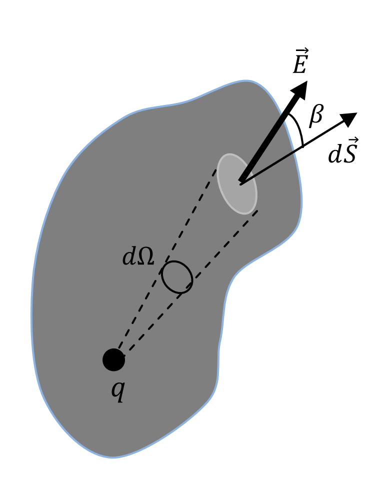
$$d\Omega = \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS\cos\beta}{r^2}$$

الزاوية المجسمة التي من أجلها نرى كل الفضاء المحيط بالمركز تساوي:

$$\Omega = \int_{\text{كل الفضاء}} d\Omega = 4\pi\ (\text{sr})$$

البرهان على نظرية غوص:

لتكن شحنة نقطية محاطة بواسطة سطح مغلق كيفي S، فإن التدفق الكهربائي الكلي للشحنة q خلال هذا السطح يُعطَى:



$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint EdS\cos\beta$$

حيث β الزاوية المحصورة بين شعاع عنصر المساحة و الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة على مسافة r (المسافة من الشحنة إلى عنصر المساحة dS). بما أن طويلة الحقل الكهربائي تساوي:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

فتصبح العلاقة السابقة كما يلي:

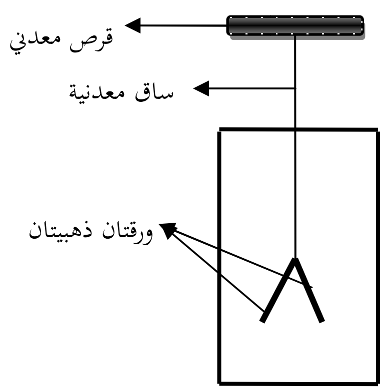
$$\phi = \oint EdS\cos\beta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{dS\cos\beta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi$$

$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

فقرة اختيارية 2 للفصل الأول

الكاشف الكهربائي ذو الورقتين الذهبيتين

لجهاز الكاشف الكهربائي ذي الورقتين الذهبيتين (*électroscope à feuille d'or*) أكثر من استخدام:



1. **الكشف إذا كان الجسم مشحونا أو لا:**

يستخدم لذلك كشاف متعادل و يقرب منه الجسم، فإذا انفرجت الورقتان يكون الجسم مشحونًا، و العكس صحيح.

2. **للكشف على نوع الشحنة:**

يستخدم لذلك كشاف مشحون بشحنة معلومة. يقرب منه الجسم بالتدريج، فإذا زاد الانفراج تكون شحنة الجسم هي نفس شحنة الكشاف، و العكس بالعكس.

3. **لقياس مقدار الشحنة:**

حيث أن زاوية انفراج الورقتين تتناسب طرديا مع الشحنة المؤثرة، لذلك تقاس زاوية الانفراج ثم تعادل عن طريق جداول خاصة لتصبح بالكولوم.

4. **لقياس كمون ناقل مشحون او للمقارنة بين كموني ناقلين.**

الفصل الثاني

النواقل المتزنة كهروستاتيكيا

لقد سبق في الفصل الأول أن تطرقنا إلى تصنيف المواد حسب قابلية توصيل الشحنة الكهربائية، و أشرنا أن الناقل هو جسم يمكن أن تتحرك فيه الشحنات (الإلكترونات) بكل حرية ضمن حدود الجسم. عندما لا تكون هناك محصلة حركة للشحنة ضمن الناقل، يكون هذا الناقل في حالة اتزان كهروستاتيكي. نستطيع القول أن كل الشحنات داخل ناقل في حالة اتزان كهروستاتيكي تكون ساكنة.

سنهتم أيضا في هذا الفصل بدراسة المكثفات –وهي أجهزة تختزن الطاقة الكهربائية– و تتكون في الأصل من ناقلين يفصلهما عازل (في دراستنا نعتبره الفراغ)، و تتميز المكثفة بمعامل يدعى سعة المكثفة، يعتمد على شكلها الهندسي و على المادة العازلة.

1.2 خواص الناقل المتزن كهروستاتيكيا

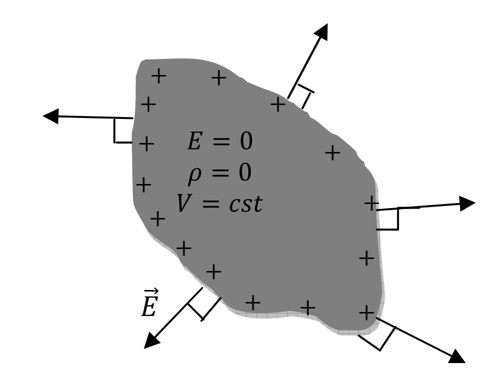
1. الحقل الكهربائي داخل الناقل المتعادل أو المشحون في حالة توازن معدوم. فلو لم يكن معدوم لتسارعت الشحنات في الناقل بفعل هذا الحقل، و يفقد الناقل حالة اتزانه.
2. الشحنة (الكثافة الحجمية للشحنة ρ) داخل الناقل المتزن كهروستاتيكيا معدومة. لنبرهن على هذه الخاصية نختار سطح غوص داخل الناقل حيث الحقل معدوم فحسب نظرية غوص و الخاصية 1:

سطح غوص

$$\phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0 \Longrightarrow \phi = 0 \Longrightarrow \sum q_{int} = 0$$

3. إذا كان الناقل مشحونا فإن الشحنة تستقر على سطحه. الحقل على سطح الناقل المشحون يجب أن يكون عموديا على هذا السطح لأنه لو وجدت مركبة مماسية (موازية) فسوف تتحرك الشحنات عليه.



4. يشكل الناقل حجما لتساوي الكمون:

$E = 0 \Longrightarrow V =$ ثابت

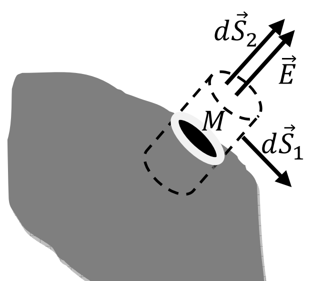
و السطح الخارجي هو سطح تساوي الكمون، و الحقل عمودي على هذا السطح.

ملاحظة:

- تتوزع شحنات الناقل المشحون على سطحه بكثافة سطحية σ موزعة على سمكٍ مكوَّنٍ من بضع طبقات من الذرات.
- الخواص السابقة للناقل تبقى صحيحة من أجل ناقل مجوف.
- عند وصل ناقل مشحون مع ناقل آخر(الأرض مثلا) يحدث تبادل في الشحنات بينهما حتى يشكلا معا حجما لتساوي الكمون (يكون لهما نفس الكمون).

2.2 العلاقة بين الحقل الكهربائي بالجوار المباشر لناقل و الشحنة الكهربائية السطحية

ليكن ناقل ذو شكل كيفي، لإيجاد الحقل الكهربائي في النقطة M بالجوار المباشر من الناقل نختار سطح غوص سطحًا اسطوانيًا (كما في الشكل). يتكون تدفق الحقل الكهربائي عبر هذا السطح المغلق من ثلاث حدود:



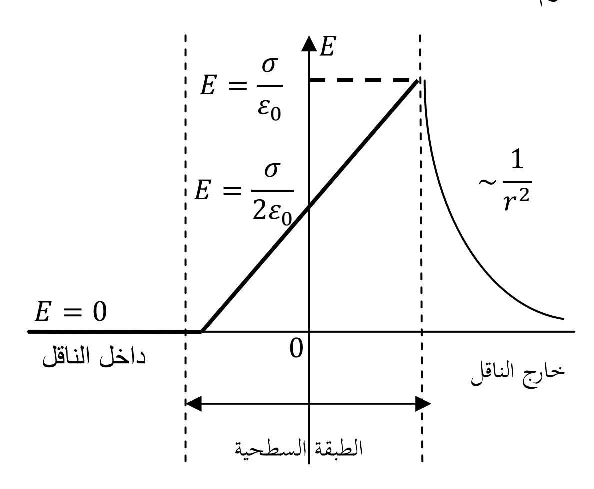
- ✓ التدفق عبر السطح الجانبي و يكون معدوما ($\vec{E} \perp d\vec{S}_1$).
- ✓ التدفق عبر القاعدة الداخلية و يكون معدوما ($\vec{E} = \vec{0}$).
- ✓ التدفق عبر القاعدة الخارجية و يعطي:

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S}_2 = EdS_2$$

لتكن σ الكثافة السطحية للشحنة بجوار النقطة M، فالشحنة الموجودة داخل سطح غوص (الأسطوانة) تساوي: $dq = \sigma dS_2$. و يصبح لدينا:

$$EdS_2 = \frac{\sigma dS_2}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

المعادلة السابقة تعطي العلاقة بين الحقل الكهربائي في نقطة M خارج الناقل بالجوار المباشر منه، بينما الحقل داخل الناقل معدوم.



3.2 الضغط الكهروستاتيكي

الشحنات الموجودة على سطح الناقل تكون خاضعة لقوى تنافر الشحنات الأخرى. لنحسب القوة المطبقة في وحدة السطح، و هو ما يسمى بالضغط الكهروستاتيكي (*pression électrostatique*). بما أن الضغط يتم في الطبقة السطحية لذلك نستعمل الحقل المتوسط $E_M = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ و يكون الضغط:

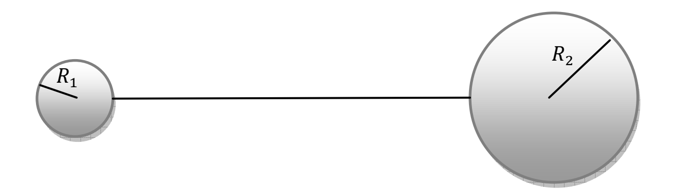
$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma dSE_M}{dS} = \sigma E_M = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \qquad (2)$$

4.2 قدرة السطوح الحادة

تبيَّنَ تجريبيا أن توزيع الشحنات على سطح الناقل لا يوافق كثافة سطحية ثابتة، بل تميل الشحنات إلى التراكم في المناطق السطحية التي يكون نصف قطر انحنائها صغيرا، و تسمى هذه الظاهرة بقدرة السطوح الحادة (*pouvoir des pointes*)، و تكون الكثافة السطحية كبيرة في الأجزاء الحادة. و الشيء نفسه بالنسبة لشدة الحقل الكهربائي التي تكون كبيرة بجوار الرأس الحاد.

توضيح:

لدينا كرتان ناقلتان نصفيا قطريهما R_1 و R_2 ($R_1 < R_2$) و بعيدتان عن بعضهما كفاية و موصولتان بسلك و مشحونتان بـ q_1 و q_2 على التوالي بكثافتين σ_1 و σ_2. الكرتان في حالة توازن لهما الكمون نفسه:



$$V_1 = V_2$$

$$\frac{kq_1}{R_1} = \frac{kq_2}{R_2} \Longrightarrow \frac{\sigma_1 4\pi {R_1}^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi, {R_2}^2}{R_2} \Longrightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

الكثافة السطحية للشحنة تكون أكبر كلما كان نصف قطر انحناء السطح أصغر. إن هذه النتيجة المسماة قدرة السطوح الحادة مهمة جدا في العديد من تقنيات التكنولوجيا مثلا: عمليات تفريغ الهواء كواقيات الصواعق ذات الرؤوس الحادة، و أيضا في الأطراف المعدنية الحادة المشدود بأجنحة الطائرات.

5.2 السعة الذاتية لناقل معزول

الشحنة q للناقل المعزول (*isolé*)، في حالة اتزان كهروستاتيكي، متناسبة مع كمونه V، أي:

$$\frac{q}{V} = C \qquad (3)$$

الثابت C يدعى سعة الناقل (*capacité d'un conducteur*).

سعة الناقل C لا تعتمد إلا على الخصائص الهندسية للناقل. عندما يكون الناقل موجودا عند كمون معين فإن سعته تميز قابليته و استعداده لتخزين الشحنة الموافقة للمعادلة السابقة (3)، و هي قيمة موجة دائما.

وحدة السعة في النظام الدولي SI هي الفاراد (*Farad*)، يرمز له ب F حيث: $F = C.V^{-1}$.

تعريف: الفاراد F هو سعة ناقل معزول يحمل عند وضعه في كمون 1 فولط شحنة مقدارها 1 كولوم.

في الواقع نتعامل في الحسابات العددية مع شحنات صغيرة جدا لذلك نحتاج إلى أجزاء الفاراد:

الميكروفاراد μF : $1\mu F = 10^{-6} F$

النانوفاراد nF : $1nF = 10^{-9} F$

البيكوفاراد pF : $1pF = 10^{-12} F$

مثال1: حساب السعة الذاتية لكرة ناقلة و معزولة.

لتكن كرة ناقلة نصف قطرها R مشحونة بشحنة q اي:

$$V = \frac{kq}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \Longrightarrow C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

نلاحظ من خلال هذا المثال أن سعة هذا الناقل تتعلق فقط بنصف قطر الناقل الكروي، أي بالشكل الهندسي فقط كما سبق الذكر.

6.2 الطاقة الداخلية لناقل مشحون و معزول

تساوي الطاقة الداخلية لناقل مشحون ومعزول (*énergie électrostatique d'un conducteur chargé et isolé*) العمل اللازم بذله لشحن الناقل، و يمكن أن تأخذ إحدى العبارات التالية، حيث q شحنة الناقل و V كمونه و C سعته في حالة الاتزان.

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV \qquad (4)$$

و هي دائما موجبة.

ملاحظات:

✓ عند تفريغ ناقل مشحون بوصله بالأرض بواسطة خيط ناقل فإن هذه الطاقة الداخلية (الطاقة الكامنة) تظهر على شكل طاقة حرارية (مفعول جول).

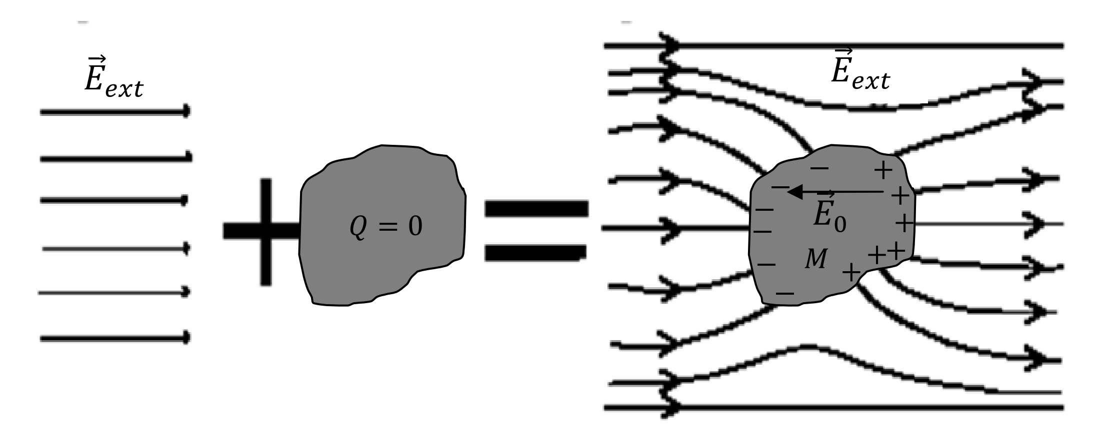
✓ عند شحن ناقل بواسطة مولد قوته المحركة الكهربائية V ثابتة فإن المولد يعطي طاقة مقدارها qV من أجل شحنة q، و تساوي ضعف الطاقة المختزلة أخيرا في الناقل و الضعف المتبقي تحول إلى طاقة حرارية أثناء عملية نقل الشحنات من المولد إلى الناقل.

7.2 ظاهرة التأثير بين النواقل المشحونة

1. تأثير حقل كهربائي خارجي على ناقل متعادل معزول:

يحتوي الناقل المعزول المتعادل كهربائيا على شحنات حرة $(-e)$، و عندما يوضع في حقل كهربائي $\vec{E}_{ext}$ فإن الإلكترونات الحرة تنتقل في اتجاه معاكس للحقل، و يظهر على طرفي الناقل شحنات موجبة و سالبة بكميات متساوية، فيتولد عن هذا التوزيع الجديد للشحنات حقل كهربائي $\vec{E}_0$ معاكس لـ $\vec{E}_{ext}$، و يزداد مع تزايد نقل الالكترونات حتى يصل الناقل إلى حالة التوازن، و هو في حالة استقطاب، أي الحقل الداخلي في النقطة Mمعدوم:

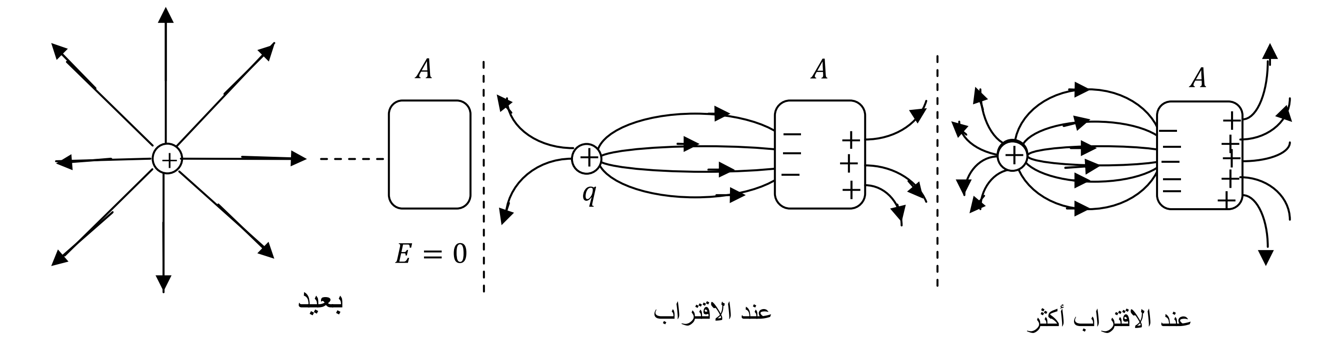
$$\vec{E}_{int}(M) = \vec{E}_{ext} + \overrightarrow{E_0} = \vec{0}$$



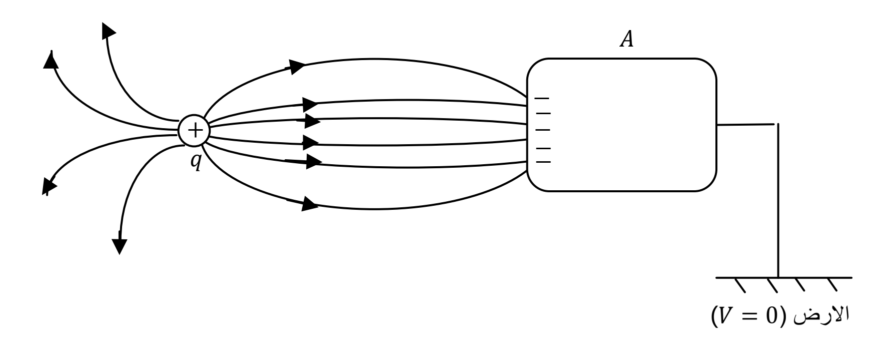
لم تتغير شحنة الناقل، كل ما حدث هو إعادة توزيع للشحنات، و تغير للكمون، حيث أصبحت تخرج خطوط الحقل من الناقل إلى اللانهاية.

2. التأثير الجزئي (*influence partielle*)

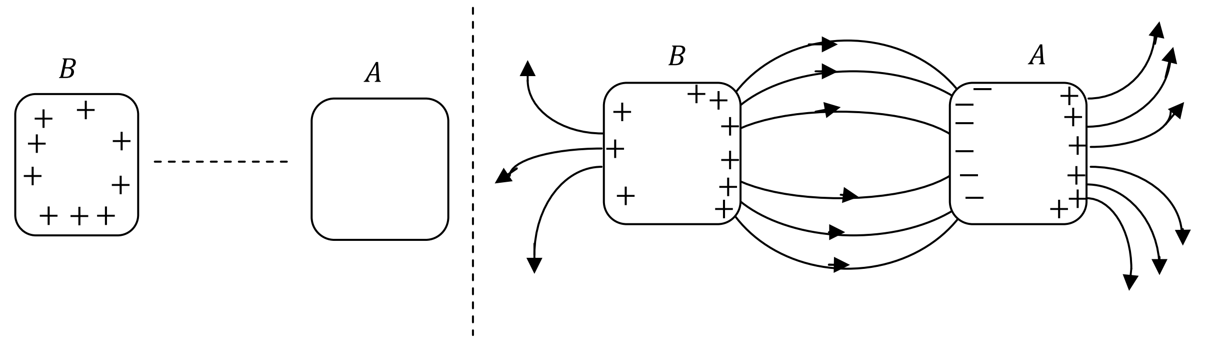
- توضح الأشكال الآتية التأثير المتزايد لشحنة موجبة q على ناقل A متعادل و معزول.



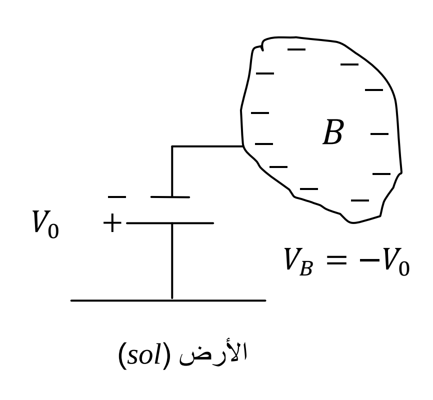
- إذا تم وصل الناقل A السابق بكمون ثابت، مثلا كمون يساوي الصفر عند وصله بالأرض، حيث تصبح الأرض و الناقل جسمًا واحدًا فتتسرب الشحنات الموجبة إلى الأرض، ويبقى كمون الناقل معدوم و لا يخرج منه أي خط أما الشحنات السالبة فتبقى مكانها لا تتسرب إلى الأرض بفعل التأثير من طرف الشحنة q.

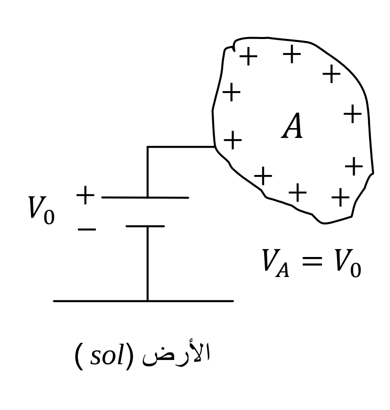


- **التأثير الرجعي**: إذا كانت الشحنة الموجبة موجودة على ناقل B فينتج تأثير رجعي من A على B يتغير توزيع شحنات الجسم A من خلال الحقل الذي ينشئه الناقل B (الناقل A دائما متعادل و معزول).



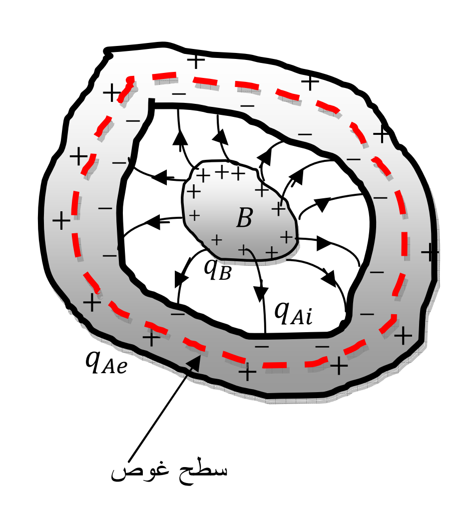
ملاحظة: يمكن أن نشحن الناقل بواسطة جهاز يدعى المولد (*générateur*).





2.التأثير الكلي (*influence totale*)

و هي حالة خاصة و هامة، يكون فيها الناقل A يحيط كليا بالناقل B المشحون بـ q_B. كل خطوط الحقل التي تخرج من B تصل إلى A.



- يتبين لنا بتطبيق نظرية غوص داخل A حيث: $E = 0$ أن السطح الداخلي لـA يحمل شحنة كهربائية q_{Ai} تساوي و تعاكس في الإشارة الشحنة q_B، ($q_B = -q_{Ai}$).
- إذا كان A معزولا ومتعادلًا من البداية، فإنه حسب مبدأ انحفاظ الشحنة للناقل A:

$$0 = q_{Ai} + q_{Ae}$$

يستوجب على السطح الخارجي لـ A أن يحمل شحنة:

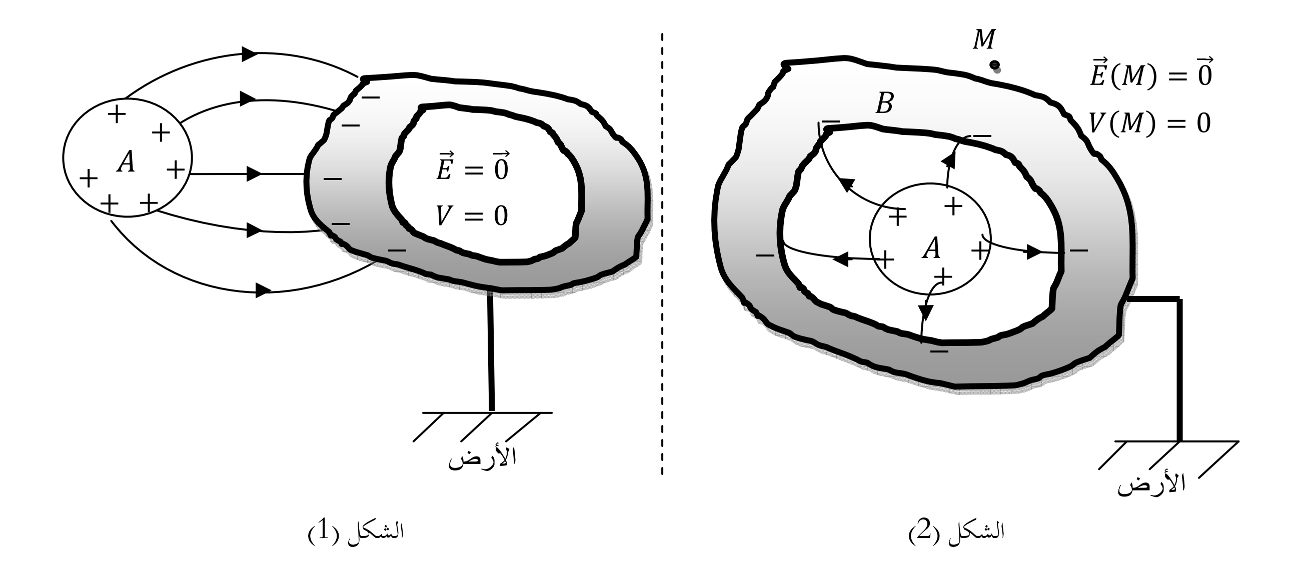
$$q_{Ae} = -q_{Ai} = q_B$$

- إذا كان A معزولا ومشحونًا بـ Q_0 من البداية، فإنه حسب مبدأ انحفاظ الشحنة للناقل A:

$$Q_0 = q_{Ae} + q_{Ai} \Longrightarrow q_{Ae} = Q_0 + q_B$$

3. مفعول الشاشة

كل ناقل مجوف عند كمون ثابت (موصول بالأرض مثلا) يشكل شاشة كهروستاتيكية في اتجاهين من الخارج إلى الداخل (1) و من الداخل إلى الخارج (2).

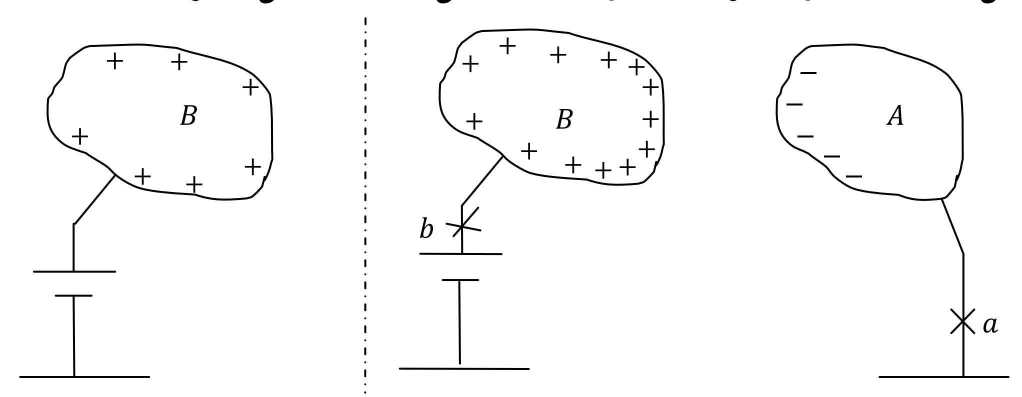


الشكل (1) الشكل (2)

التجويف يكون في حماية من كل تأثير. يستعمل مفعول الشاشة في العديد من التطبيقات العملية مثلا: تغلف العناصر الإلكترونية (مكثفات، أسلاك...) بأوقية معدنية (قفص معدني) مربوطة بالأرض.

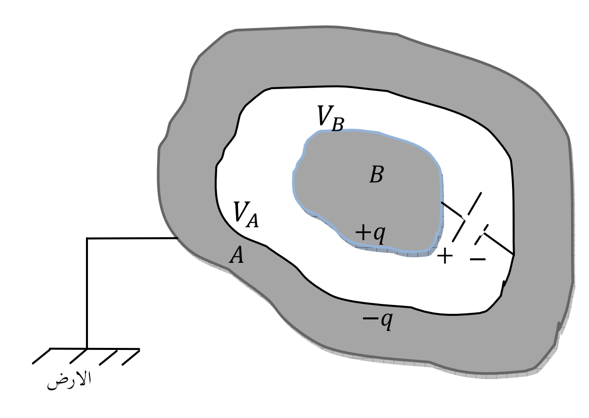
8.2 المكثفات

في حالة التوازن بوجود الناقل A ذي الكمون الثابت (موصول بالأرض) بجوار ناقل ثانٍ B سوف يحمل شحنات أكثر مما لو كان منفردا، فقد حصل تكثيف للناقل B و ازدادت سعته.



تشكل المجموعة المكونة من الناقلين A و B ما يسمى بالمكثفة (*condensateur*) و يرمز لها بـ

b a



يمكن تحقيق مثل هذا التكثيف باستخدام ناقلين A وB في حالة تأثير متبادل كلي، حيث q_A و q_B متساويتان في القيمة و مختلفتان في الإشارة. نسمي $q = |q_B| = |q_A|$ شحنة المكثفة، وإذا كان V فرق الكمون بين الناقلين $V_B - V_A = V$ يمكن أن نثبت :

$$C = \frac{q}{V} \tag{5}$$

C: سعة المكثفة، و هي لا تعتمد إلا على شكل الناقلين و طبيعة الوسط الموجود بينهما [1]، و هي تزداد كلما اقترب الناقلان من بعضهما.

كيفية حساب سعة المكثفة:

1. حساب الحقل الكهربائي في كل نقطة داخل المكثفة (نستعمل نظرية غوص مثلا).
2. إستنتاج فرق الكمون بين الناقلين (نستعمل $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$).
3. إيجاد النسبة: $C = \frac{q}{V}$.

مثال2: حساب سعة مكثفة مستوية (***condensateur plan***).

أحسب سعة مكثفة مستوية الشكل، مساحة اللبوسين هي S، و تفصلهما مسافة e.

الحقل الكهربائي بالنسبة لمستوٍ لانهائي كثافته السطحية σ في أي نقطة يساوي:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$+q$ V_1

e $\vec{E}_1$ $\vec{E}_2$

$-q$ V_2

X

---

[1] في كامل دراستنا الوسط هو الفراغ.

الحقل الكلي بين اللبوسين:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\imath}$$

حيث $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ الحقل الكهربائي الناتج عن اللبوس (المستوي) ذي الشحنة $+q$ و اللبوس (المستوي) ذي الشحنة $-q$ على الترتيب.

حساب فرق الكمون بين طرفي المكثفة :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Longrightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV}{dx}$$

$$dV = -Edx \Longrightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx \to V_2 - V_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$$

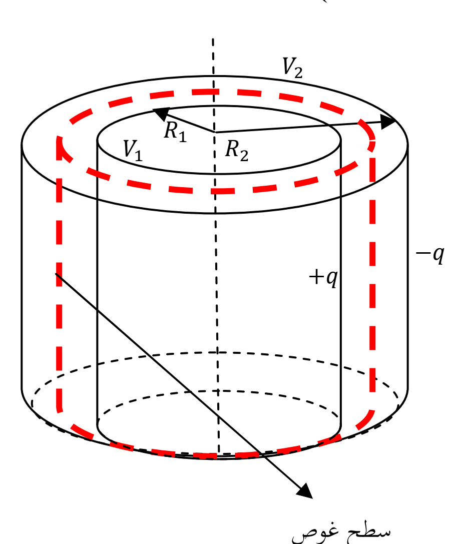
و منه السعة

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

S : مساحة اللبوسين.

ملاحظة: كما رأينا سابقا، سعة المكثفة تتعلق فقط بالشكل الهندسي للبوسين الممثل بـ S و e و الوسط الذي يعتبر في حالتنا الفراغ المعطى بـ ε_0.

مثال 3: حساب سعة مكثفة اسطوانية (*condensateur cylindrique*).



أحسب سعة مكثفة اسطوانية الشكل ذات أنصاف أقطار على التوالي R_1 و R_2 و ارتفاعها h.

نحسب الحقل الكهربائي بين لبوسي المكثفة بتطبيق نظرية غوص في المنطقة حيث $R_1 < r < R_2$، نختار سطح غوص أسطوانة نصف قطرها r:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E2\pi rh = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \; E = \frac{q}{\varepsilon_0 2\pi h}\frac{1}{r}$$

الحقل الكهربائي قطري، أي يتعلق بـ r و له مركبة على $\vec{E}_r$، و منه فرق الكمون بين طرفي المكثفة:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Longrightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow dV = -Edr$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{\varepsilon_0 2\pi h}\frac{1}{r}dr$$

$$V_2 - V_1 = -\frac{q}{\varepsilon_0 2\pi h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 2\pi h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

و منه السعة

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 2\pi h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

ملاحظة: سعة المكثفة الاسطوانية تتعلق فقط بالشكل الهندسي للبوسين الممثل بـ $\frac{2\pi h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$ و الوسط، الذي يعتبر في حالتنا الفراغ المعطى بـ ε_0.

عندما تكون المسافة بين اللبوسين صغيرة جدا مقارنةً بـ R_1 و R_2 يمكن كتابة:

$$R_2 - R_1 = e, \qquad R_2 R_1 \approx r^2$$

$$\rightarrow \ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \approx \frac{e}{R_1} \approx \frac{e}{r}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 2\pi h}{\frac{e}{r}} = \frac{\varepsilon_0 2\pi hr}{e} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

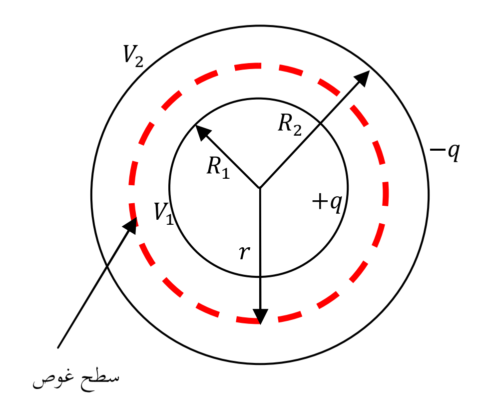
$2\pi hr = S$ مساحة اللبوس.

سعة المكثفة الأسطوانية تؤول إلى سعة المكثفة المستوية.

مثال 4: حساب سعة مكثفة كروية (***condensateur sphérique***).

أحسب سعة مكثفة كروية الشكل ذات أنصاف أقطار على التوالي R_1 و R_2.

نحسب الحقل الكهربائي بين لبوسي المكثفة بتطبيق نظرية غوص في المنطقة $R_1 < r < R_2$ (نختار سطح غوص كرة نصف قطرها r):



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi}\frac{1}{r^2}$$

الحقل الكهربائي قطري أي يتعلق بـ r له مركبة على $\vec{E}_r$ و منه فرق الكمون بين طرفي المكثفة:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V \Longrightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow dV = -Edr$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi}\frac{1}{r^2}dr$$

$$V_2 - V_1 = -\frac{q}{\varepsilon_0 4\pi}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}\right)$$

و منه السعة

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 4\pi R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

ملاحظة: سعة المكثفة الكروية تتعلق فقط بالشكل الهندسي للبوسين الممثل بـ $\frac{4\pi R_2 R_1}{R_2 - R_1}$ و الوسط، الذي يعتبر في حالتنا الفراغ المعطى بـ ε_0.

عندما تكون المسافة بين اللبوسين صغيرة جدا مقارنةً بـ R_1 و R_2 يمكن كتابة:

$$R_2 - R_1 = e \rightarrow R_2 R_1 \approx r^2$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 4\pi r^2}{e} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

حيث $4\pi r^2 = S$ مساحة لبوس المكثفة.

سعة المكثفة الكروية تؤول إلى سعة المكثفة المستوية.

ملاحظة:

- ✓ للحصول على مكثفة ذات سعة كبيرة فان المعاملات الهندسية التي نهتم بها هي سطح اللبوسين الذي يجب أن يكون كبيرًا كفاية، و المسافة بين اللبوسين يجب أن تكون صغيرة جدا بالنسبة لأبعاد السطح.
- ✓ في الحقيقة، بالنسبة للمكثفة المستوية و الأسطوانية، الناقلان ليسا في تأثير كلي، و بما أن المسافة الفاصلة بين لبوسي المكثفة صغيرة مقارنه بسطح اللبوسين، في هذه الحالة يمكن اعتبار ان التأثير كلي.

9.2 الطاقة الكهربائية للمكثفة

من أجل ناقل معزول مشحون بـ q و كمونه V و سعته C، الطاقة الكامنة الكهروستاتيكية:

$$E_p = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad (6)$$

ومنه الطاقة الكهروستاتيكية من أجل مكثفة مكونة من ناقلين A و B معزولين شحنتها q و كمونها $V = V_B - V_A$ حيث V_A و V_B كمون الناقلين A و B على الترتيب:

$$q_A = -q, \quad q_B = q \,, \; |q_A| = |q_B| = q$$

$$E_P = \frac{1}{2}(q_A V_1 + q_B V_2) = \frac{1}{2}q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

سؤال: أين تخزن هذه الطاقة و بأي شكل؟

نأخذ مثلا المكثفة المستوية، ذات الشحنة Q الموزعة بانتظام على كامل المستوي الذي مساحته S:

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma S)^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{e}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2(Se) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}v$$

فالحجم الموجود بين اللبوسين $v = Se$، و منه الطاقة تخزن في الحقل نفسه بكثافة حجمية:

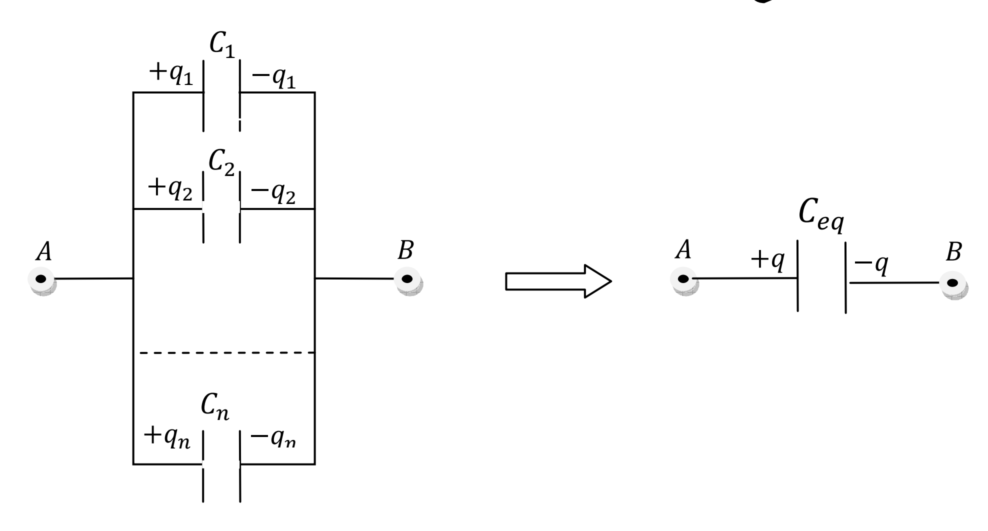
$$\Omega_e = \frac{E_p}{v} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

تمثل Ω_e كثافة الطاقة الكهربائية في الفراغ ووحدتها في النظام الدولي : Jm^{-3}.

10.2 جمع المكثفات

لا يمكن لمكثفة أن تتحمل بين لبوسيها فرقا في الكمون أعلى من قيمة معينة تدعى الكمون الانفجاري، لذلك نلجأ لتخزين أكبر كمية ممكنة من الطاقة بتجميع العديد من المكثفات. المكثفة المكافئة (*condensateur équivalent*) لمجموعة من المكثفات هي مكثفة لها نفس فرق كمون المجموعة، و أثناء التفريغ تنتج الطاقة نفسها أي كمية الكهرباء نفسها للمجموعة.

جمع المكثفات على التفرع (***groupement en parallèle***):



كل المكثفات لها فرق الكمون نفسه:

$$V = V_A - V_B$$

المكثفة المكافئة تحمل شحنة:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots = C_1V + C_2V + \cdots = V\sum_{i=1}^{n} C_i = VC_{eq}$$

السعة المكافئة للمكثفة المكافئة:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad (7)$$

جمع المكثفات على التسلسل (*groupement en série*):

للمكثفات الشحنة نفسها و فرق الكمون هو مجموع فروق الكمونات:

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) \dots = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n} = \frac{q}{C_{eq}}$$

السعة المكافئة:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \qquad (8)$$

مثال5: تطبيق على المكثفات.

نعتبر مكثفتين ذاتي سعتي C_0 و$2C_0$ على التوالي مشحونتين و معزولتين، الواحدة على الأخرى. الأولى مشحونة تحت فرق كمون C_0 و الثانية $3V_0$.

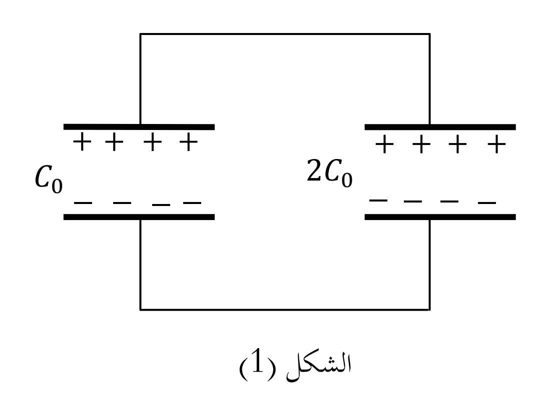
1. أحسب الطاقة الكهربائية الكلية المخزنة في المكثفتين E_{pi}.
2. نوصل المكثفتين مثل الشكل (1).

1.2 أحسب الشحنة المحمولة على كل مكثفة عند التوازن الكهروستاتيكي.

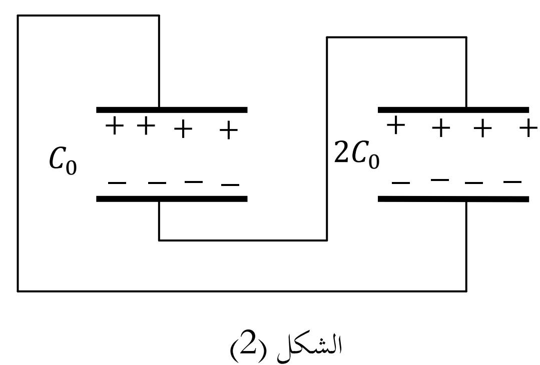
2.2 أحسب الطاقة الكلية النهائية E_{pf} للمكثفتين، قارنها بـ E_{pi} . خلاصة.

3.2 وصّل اللبوسين السالبين للمكثفتين بالأرض. ماذا يحدث؟ إشرح.

3. عند حالة التوازن النهائية في الشكل الأول نقطع التوصيل، و نعيد توصيله كما بالشكل (2) ماذا يحدث؟ إشرح.



الشكل (1)



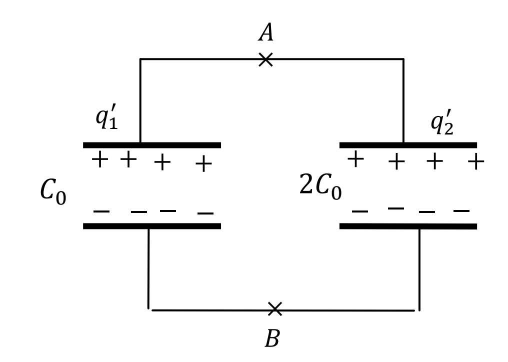
الشكل (2)

الحل:

1.الطاقة E_{pi} المختزنة في المكثفتين قبل التوصيل:

$$E_{pi} = \frac{1}{2}C_0{V_O}^2 + \frac{1}{2}(2C_0)(3V_O)^2 = \frac{19}{2}C_0{V_O}^2$$

2. عند التوصيل تصبح المكثفتان مكثفة واحدة فيحدث إعادة توزيع الشحنات الموجبة و السالبة بين لبوسي المكثفة حتى تصل إلى كمون متساوٍ، أي فرق الكمون بين طرفي المكثفتين متساوٍ $(\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B})$.



1.2الشحنات النهائية على المكثفاتq'_2 و q'_1 :

$$q'_1 = \mathrm{C_0}(\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B}) \qquad (1)$$
$$q'_2 = 2\mathrm{C_0}(\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B}) \qquad (2)$$

من مبدأ انخفاظ الشحنة لنظام معزول قبل التوصيل و بعده نجد:

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2 \qquad (3)$$

حيث q_1 و q_2 الشحنتان المحمولتان على المكثفتين ذاتي السعتين $\mathrm{C_0}$ و$2\mathrm{C_0}$ على التوالي قبل وصل لبوسي المكثفتين.

$$q_1 = C_0V_0 \qquad (4)$$
$$q_2 = (2C_0)(3V_0) = 6C_0V_0 \qquad (5)$$

باستعمال المعادلات السابقة (1) إلى (5) نجد:

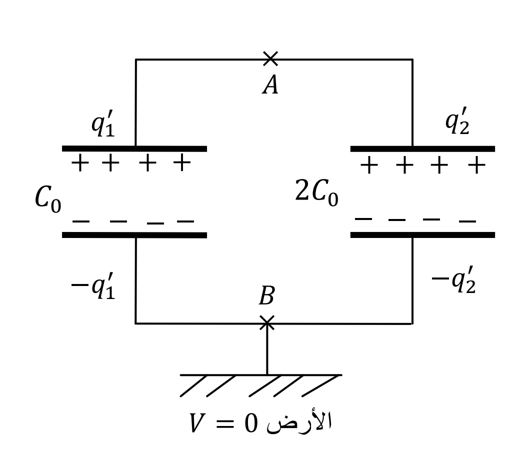
$$q'_1 = \frac{7}{3}C_0V_0, \qquad q'_2 = \frac{14}{3}C_0V_0$$

2.2 الطاقة E_{pf} المختزنة في المكثفتين بعد توصيل لبوسيهما:

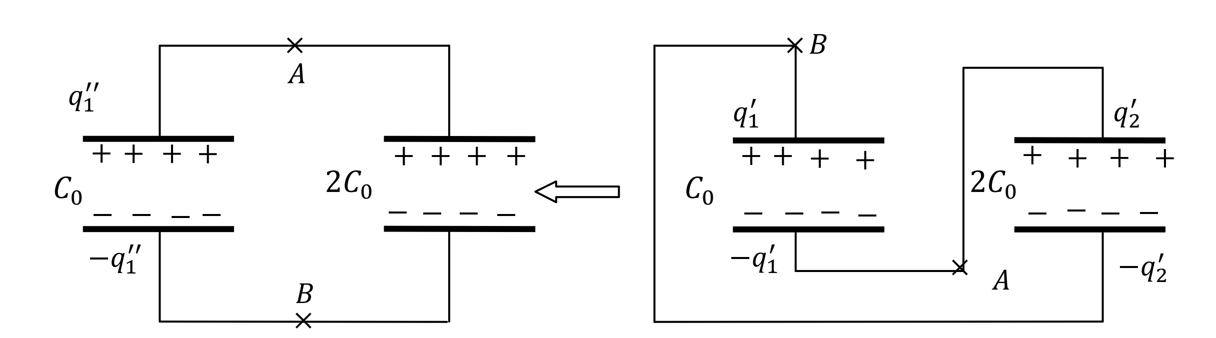
$$E_{pf}=\frac{1}{2}\frac{{q_1{}'}^2}{C_0}+\frac{1}{2}\frac{{q_2{}'}^2}{2C_0}=\frac{294}{36}C_0{V_O}^2=\frac{49}{6}C_0{V_O}^2$$

الطاقة E_{pi} أكبر من E_{pf}، إعادة توزيع الشحنات على لبوسي المكثفتين بعد التوصيل (انتقال الشحنات) يرافقه ضياع في الطاقة الداخلية على شكل حرارة.

3.عندما نقوم بتوصيل اللبوسين السالبين للمكثفتين بالأرض لا يحدث أي شيء. في الواقع، الشحن الكهربائية موزعة بحيث يكون كمون اللبوسين المرتبطين نفسه. اللبوسان السالبان يشكلان مع الأرض ناقلًا واحدًا كمونه $V_B=0$. لا تتسرب الشحنات $-q'_2$ و $-q'_1$ إلى الأرض لأنها مرتبطة بتأثير الشحنات الموجبة لذلك الطاقة الداخلية للمكثفتين تبقى ثابتة .



4. قبل التوصيل كان للمكثفتين C_0 و $2C_0$ الشحنة q'_1 و q'_2 على الترتيب، و بعد توصيل اللبوس السالب بالموجب للمكثفتين، كما في الشكل الثاني، تتوزع الشحن لتحقق حالة توازن جديدة، حيث يكون لهما فرق الكمون نفسه بين طرفيهما، و تكون شحنة المكثفتين q''_1 و q''_2 على الترتيب. من الإجابة على السؤال 1.2 نجد أن $q'_1<q'_2$.



لدينا:

$$q''_1=C_0(V_A-V_B)$$
$$q''_2=2C_0(V_A-V_B)$$

حسب مبدأ انحفاظ الشحنة لنظام معزول قبل التوصيل و بعده نجد:

$$q'_2-q'_1=q''_1+q''_2$$

من الإجابة على السؤال 1.2 لدينا:

$$q'_2 - q'_1 = \frac{7}{3} C_0 V_0 = 3\, C_0 (V_A - V_B) \Longrightarrow V_A - V_B = \frac{7}{9} V_0$$

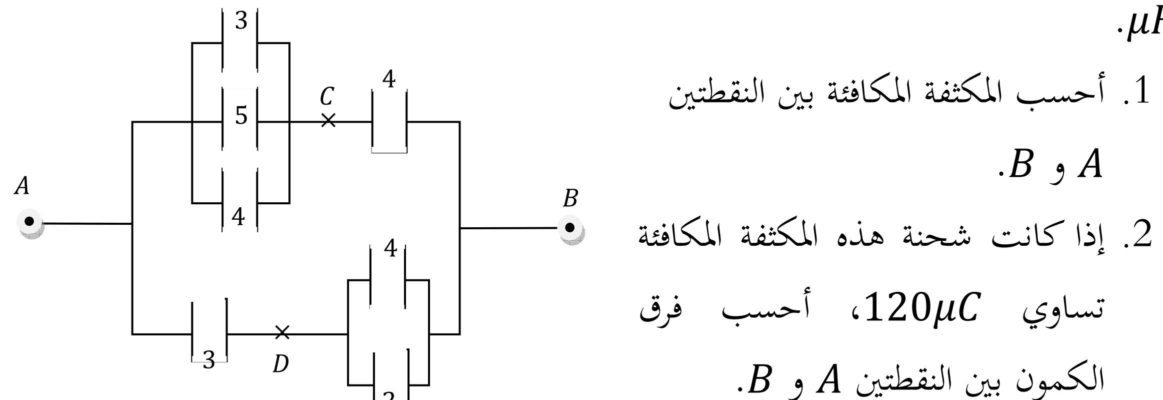
و منه:

$$q''_1 = C_0 (V_A - V_B) = \frac{7}{9} C_0 V_0$$

$$q''_2 = 2C_0 (V_A - V_B) = \frac{14}{9} C_0 V_0$$

مثال 6: حساب السعة المكافئة.

يمثل الشكل شبكة من المكثفات مربوطةً على التسلسل و التفرع. السعات المرفقة للمكثفات محسوبة بـ μF.



1. أحسب المكثفة المكافئة بين النقطتين A و B.
2. إذا كانت شحنة هذه المكثفة المكافئة تساوي $120\mu C$، أحسب فرق الكمون بين النقطتين A و B.

الحل:

1. المكثفات الثلاثة بين النقطتين A و C موجودة على التفرع، فالسعة المكافئة لهما C_{eq1} :

$$C_{eq1} = 3 + 5 + 4 = 12\mu F$$

المكثفة بين النقطتين C و B و المكثفة ذات السعة C_{eq1} موجودتان على التسلسل، و تكافئان مكثفة ذات السعة C_{eq2}:

$$C_{eq2} = \left(\frac{1}{C_{eq1}} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = 3\mu F$$

المكثفتان بين النقطتين D و B على التفرع و تكافئان مكثفة ذات سعة C_{eq3} :

$$C_{eq3} = 4 + 2 = 6\mu F$$

المكثفة بين النقطتين D و A و المكثفة ذات السعة C_{eq3} موجودتان على التسلسل، و تكافئان مكثفة ذات سعة C_{eq4}:

$$C_{eq4} = \left(\frac{1}{C_{eq3}} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = 2\mu F$$

المكثفة الكلية المكافئة C_{eq} بين النقطتين A و B:

$$C_{eq} = C_{eq2} + C_{eq4} = 3 + 2 = 5\mu F$$

2. فرق الكمون بين النقطتين A و B:

$$V_A - V_B = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{120}{5} = 24 \text{ V}$$

فقرة اختيارية للفصل الثاني

المكثفة بوجود العازل

العازل هو مادة غير ناقلة (الزجاج، المطاط...)، عند وضعها بين لبوسي المكثفة فإن سعة هذه الأخيرة تزداد بمعامل k ليس له أبعاد يسمى ثابت العزل (*constante diélectrique*)، يتعلق هذا المعامل بخواص المادة، و يختلف من مادة إلى أخرى.

لتوضيح تأثير العازل على سعة المكثفة، نأخذ حالة مكثفة مستوية في البداية تكون بدون عازل و تمتلك شحنة Q_0 و سعة $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$، يعطى فرق الكمون V_0 بين طرفيها بالعلاقة التالية:

$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0}$$

سندخل الأن عازلا بين لبوسيها و نحسب بواسطة جهاز فولطمتر قيمة فرق الكمون V بين طرفي المكثفة فنجده أقل من V_0 بحيث:

$$V = \frac{V_0}{k}$$

حيث $k > 1$.

حيث لا يوجد أي سبب لتغير الشحنة بين حالة المكثفة بعازل و بدون عازل فستبقى ثابتة، نستنتج أن سعة المكثفة تتغير:

$$C = \frac{Q_0}{V} = k\frac{Q_0}{V_0} = kC_0$$

أي أن السعة تزداد بمعامل k عندما يملأ العازل المنطقة بين لبوسي المكثفة. في حالة مكثفة مستوية، يمكننا التعبير عن السعة بوجود عازل كما يلي:

$$C = k\frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

رأينا سابقا أنه لجعل السعة كبيرة يجب تقليص المسافة بين لبوسي المكثفة e. عمليا، أقل قيمة لـ e تحدد بواسطة التفريغ الكهربائي الذي يمكن حصوله في الوسط العازل، و الذي يعتمد على شدة عزل العازل (*rigidité diélectrique*)، و تمثل القيمة القصوى للحقل التي يتحملها العازل دون

انهياره (حدوث التفريغ الكهربائي). فإذا ازداد مقدار الحقل الكهربائي في المواد العازلة عن قيمة شدة العزل يبدأ العازل في التوصيل. يوفر وجود العازل في المكثفة الزيادة في السعة و فرق الكمون، ويعتبر أيضا الدعامة الميكانيكية لتقريب لبوسي المكثفة أكبر ما يمكن دون التلامس.

2.3 اتجاه التيار الكهربائي

هناك العديد من الظواهر الفيزيائية التي تفسر مرور التيار الكهربائي مثل:

- فعل جول الحراري.
- التحليل الكهربائي.
- انحراف الإبرة الممغنطة

برهنت معظم هذه التجارب على أن للتيار الكهربائي اتجاهًا، و قد اصطلح على أنه نتيجة لحركة الشحنات الموجبة من القطب السالب إلى القطب الموجب داخل المولد، و من القطب الموجب إلى القطب السالب خارج المولد، بغض النظر عن المسبب الحقيقي للتيار.

ملاحظات:

- ✓ في النواقل الكهربائية و أنصاف النواقل[2] مثل النحاس و الألمنيوم ، يكون التيار بسبب حركة الإلكترونات السالبة، لذلك فاتجاه التيار الاصطلاحي هو معاكس لاتجاه انسياب الإلكترونات، المسؤول الحقيقي عن التيار.
- ✓ في المسرعات هناك حزم من البروتونات الموجبة مسببة للتيار فيكون اتجاه التيار الاصطلاحي باتجاه انسياب البروتونات.
- ✓ قد توجد حالات حيث يكون فيها السبب في إنشاء التيار شحنات موجبة و سالبة في آن واحد (التحليل الكهربائي و تأين الغازات (االبلازما)).

3.3 شدة التيار الكهربائي

شدة التيار الكهربائي I (*Intensité du courant électrique*) هي كمية الكهرباء dq المارة عبر مقطع S خلال زمن dt:

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (1)$$

---

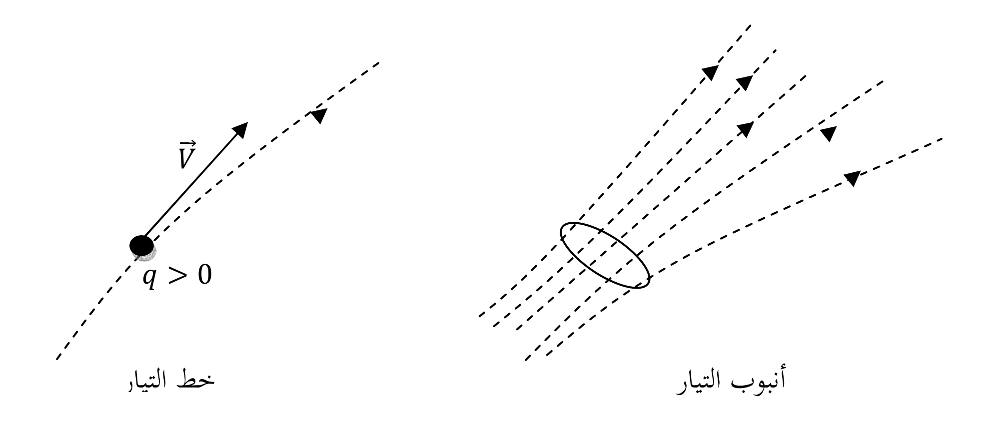
[2] كل ذرة في النواقل تساهم بإلكترون أو اثنين للنقل، و بقية الالكترونات مرتبطة أما بالنسبة لأنصاف النواقل عدد الإلكترونات الحرة أقل، حيث يوجد تقريبا إلكترون حر واحد لكل 10^3 إلى 10^6 ذرة .

وحدة التيار في النظام الدولي SI هي أمبير (*Ampère*)$:A = \mathrm{C/S}$.

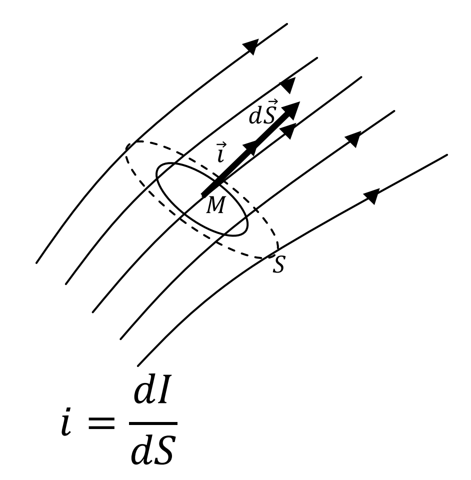
تعريف: الآمبير $(1A)$ هي شدة التيار المكافئة لشحنة قدرها 1 كولوم $(1C)$ تمر خلال سطح في 1 ثانية $(1s)$.

ملاحظة:

- ✓ سنهتم خلال دراستنا بالنظام المستقر(*Régime stationnaire*)، الذي يكون فيه كمون نقطة ما من الدارة الكهربائية غير متغير مع الزمن، و ينتج عن ذلك أن شدة التيار ثابتة عبر أي مقطع من مقاطع الدارة.
- ✓ نعرف خط التيار(*ligne de courant*) المسار الموجه لحركة الشحنات الموجبة، حيث شعاع السرعة لهذه الشحنات مماسي لخطوط التيار في كل نقطة منها. و أنبوب التيار (*tube de courant*) هو مجموعة من خطوط التيار التي تستند على مسار مغلق.



4.3 شعاع كثافة التيار



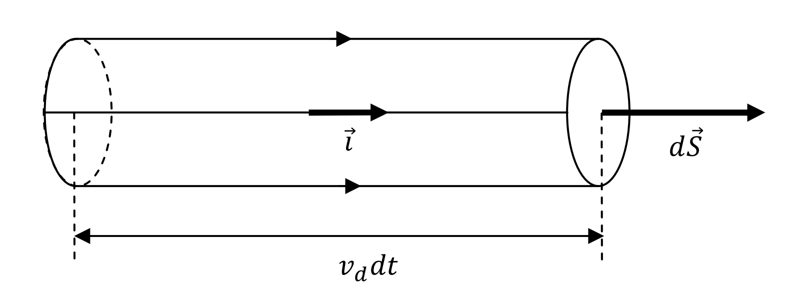
نعرف في كل نقطة M من وسط تتحرك فيه الشحنات، شعاعًا $\vec{\imath}$ مبدؤه هذه النقطة و اتجاهه اتجاه حركة الشحنات الموجبة و مماسي لخط التيار المار بـ M و طويلته:

$$i = \frac{dI}{dS} \qquad (2)$$

حيث dI هي شدة التيار الكهربائي المارة عبر السطح العنصري dS. يسمى هذا الشعاع بكثافة التيار في نقطة M، وحدته في النظام الدولي: $\mathrm{A/m^2}$. يتغير $\vec{\iota}$ مقدارا و اتجاها من نقطة إلى أخرى في الناقل، فمن أجل ناقل مقطعه S يكون لدينا:

$$I = \int_S \vec{\iota}.d\vec{s}$$

لنعتبر داخل ناقل أنبوب تيار مستقيمًا ذا مقطع dS، يسري خلاله تيار شدته dI، و لتكن $\vec{v}_d$ السرعة المتوسطة للشحنات الحرة[3] و w كثافتها الحجمية المحلية (C/m^3) (كمية الشحنة في وحدة الحجم) لنحسب dq كمية الشحنة التي تعبر dS خلال dt، و تشغل في لحظة معينة الحجم الأسطواني $dV = v_d dtdS$:



$$dq = wdV = wdsv_d dt \Longrightarrow dI = \frac{dq}{dt} = wdsv_d \Longrightarrow i = \frac{dI}{dS} = wv_d$$

$$\vec{\iota} = w\vec{v}_d$$

فإذا كان n عدد الشحنات الحرة في وحدة الحجم فإن $w = nq$، حيث q قيمة كل شحنة حرة (الجبرية):

$$\vec{\iota} = nq\vec{v}_d \qquad (3)$$

يتعلق شعاع كثافة التيار بالكثافة المحلية للشحنات الحرة و سرعة انتقال الشحنات.

[3] عندما يسلط فرق كمون عبر ناقل فإن حقلا كهربائيا ينشأ و يؤثر على الإلكترونات بقوة، فتتحرك الإلكترونات، لكن ليس بخطوط مستقيمة، بل تصطدم بتكرارية مع ذرات الناقل، و محصلة حركتها تعطي السرعة المتوسطة.

ملاحظات:

- ✓ في حالة المعادن و السبائك و أنصاف النواقل مرور التيار لا يقابله انتقال للمادة .
- ✓ أما في حالة التحليل الكهربائي و تأين الغازات (البلازما) يعبر عن مرور التيار الكهربائي بانتقال المادة.

مثال 1: حساب السرعة المتوسطة للإلكترونات.

سلك نحاس له مساحة مقطع عرضي $3{,}31 \times 10^{-6}\mathrm{m}^2$، فإذا كان يحمل تيارًا مقداره $10A$ فما هي السرعة المتوسطة لحاملات الشحنة الإلكترونات، حيث نفرض أن كل ذرة نحاس تساهم بإلكترون حر واحد للتيار. الكتلة الحجمية للنحاس $8{,}95\mathrm{g/cm}^3$ و الكتلة المولية للنحاس $63{,}5\mathrm{g/mol}$ ، و كل مول يحتوي على $N = 6{,}02 \times 10^{23}$ (عدد آفوقادرو) من الذرات.

الحل:

نعتبر $\vec{i}//\vec{s}$ فيكون لدينا:

$$I = is = nqv_d s \Longrightarrow v_d = \frac{I}{nqs}$$
$$q = e = 1{,}6.\,10^{-19}c$$

n: عدد الإلكترونات الحرة في وحدة الحجم.

من معرفتنا للكتلة الحجمية للنحاس، يمكننا حساب الحجم المشغول بواسطة $63{,}5\mathrm{g}(= 1\mathrm{mol})$ من النحاس:

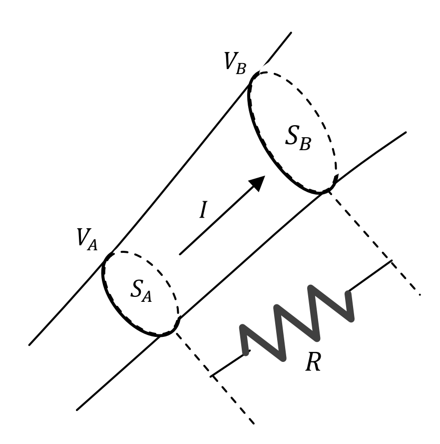
$$V = \frac{\text{الكتلة المولية}}{\text{الكتلة الحجمية}} = \frac{63{,}5\mathrm{g}}{8{,}95 \times 10^6\mathrm{g/m}^3} = 7{,}09.\,10^{-6}\mathrm{m}^3$$

و بما أن كل ذرة نحاس تساهم بإلكترون حر واحد فإن:

$$n = \frac{\text{عدد الإلكترونات}}{\text{الحجم}} = \frac{6{,}02.\,10^{23}}{7{,}09.\,10^{-6}} = 78{,}49.\,10^{28} electrons/m^3$$

$$v_d = \frac{I}{nqs} = \frac{10}{(8{,}49.\,10^{28})(1{,}6.\,10^{-19})(3{,}31 \times 10^{-6})}$$
$$= 2.22 \times 10^{-4}\mathrm{m/s}$$

5.3 قانون أوم



يعد قانون أوم (*loi d'Ohm*) أحد القوانين التجريبية في الفيزياء، و ينص: نسبة فرق الكمون $V = V_A - V_B$ بين نقطتين A و B من ناقل معدني متجانس موجود عند درجة حرارة ثابتة، على التيار الكهربائي I تكون ثابتة، و نسمي هذا الثابت بالمقاومة الكهربائية (*résistance électrique*) للناقل بين نقطتين ويرمز لها بـ R:

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{V}{I} \tag{4}$$

و وحدتها في النظام الدولي الأوم (*ohm*):$\Omega = V/A$.

لنأخذ الحالة البسيطة: ناقل معدني أسطواني طوله $L = AB$ و مساحة مقطعه S موضوع في حقل كهربائي $\vec{E}$:

يعطى فرق الكمون الكهربائي بين نقطتين:

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

بما ان الناقل سلكا مقطعه S، فإن الحقل الكهربائي منتظم على طول السلك، أي:

$$V = EL, \qquad I = iS$$

فيكون لدينا:

$$V = RI = EL \Longrightarrow RiS = EL$$

نحصل على عبارة جديدة لكثافة التيار بدلالة الحقل الكهربائي:

$$i = \left[\frac{L}{Rs}\right] E = \sigma E$$

$$\vec{i} = \sigma \vec{E} \tag{5}$$

و هي طريقة ثانية لكتابة قانون أوم، حيث:

$$\sigma = \frac{L}{Rs}$$

يدعى الثابت σ بالناقلية الكهربائية (*conductivité électrique*). وحدته في النظام الدولي $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ ، و نميز الوسط عادة بالمقاومية (*résistivité*)، و يرمز لها بـ ρ، و هي مقلوب الناقلية:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

وحدة المقاومية في النظام الدولي: $\Omega\mathrm{m}$. تمتلك كل المواد الأومية مقاومة تعتمد على خواص المادة و درجة الحرارة.

حساب مقاومة ناقل أومي متجانس: نحسب المقاومة في ناقل، و التي تعتمد على خصائصه.

- **باستعمال طريقة التكامل:**

$$dR = \frac{1}{\sigma}\frac{dl}{S} = \rho\frac{dl}{S}$$

dl : عنصر الانتقال للشحنات.

S: مقطع تدفق الشحنات.

- **استعمال طريقة أوم:** حيث نعلم الحقل الكهربائي (طريقة غوص)، ثم نقوم بحساب فرق الكمون، و في الأخير نطبق علاقة أوم لحساب المقاومة:

$$i = \frac{E}{\rho} = \frac{I}{S} \Longrightarrow I = \frac{ES}{\rho}, \quad R = \frac{V}{I} = \frac{\rho V}{ES}$$

ملاحظات:

- ✓ في الواقع، حساب المقاومات معقد جدا إلا إذا كان الشكل الهندسي بسيطًا.
- ✓ قانون أوم صالح من أجل كل المعادن الاعتيادية أو المألوفة، و تدعى النواقل الأومية (*conducteurs ohmiques*).
- ✓ العديد من المواد مثل أنصاف النواقل لا تخضع لقانون أوم.
- ✓ الأوم هو مقاومة ناقل يمر عبره تيار قيمته واحد آمبير عندما يظهر بين طرفيه فرق كمون مقداره 1 فولط.
- ✓ يكون قانون أوم صحيحا لكل المعادن ضمن مجال واسع لدرجة الحرارة، و هي تؤثر على الأبعاد الهندسية، و لكن هذا التأثير ضعيف عند مقارنته بمفعولها على المقاومية ρ.

مثال2: حساب مقاومة سائل على شكل أسطوانة.

أسطوانتان متمحورتان طولهما L و نصف قطريهما R_1 و R_2 حيث $(R_1 < R_2)$. ملئ فضاء المساحة الفاصل بينهما بسائل مقاومته النوعية ρ، فإذا كان كمونا الأسطوانتين على التوالي V_1 و V_2.

1. أحسب مقاومة السائل R بطريقة التكامل.
2. أحسب مقاومة السائل R باستعمال قانون أوم.

الحل:

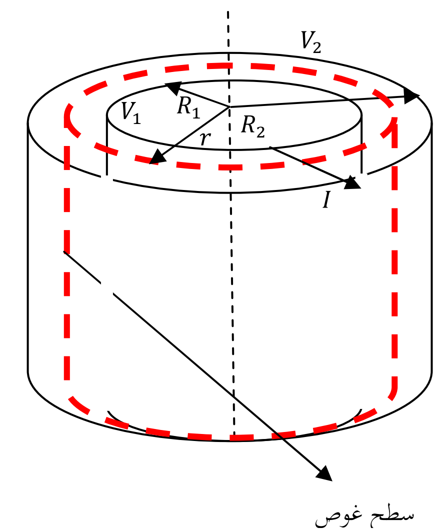
لدينا:

$$dl = dr\,, \qquad S = 2\pi rL$$

1. تُعطَى مقاومة طبقة عنصرية:

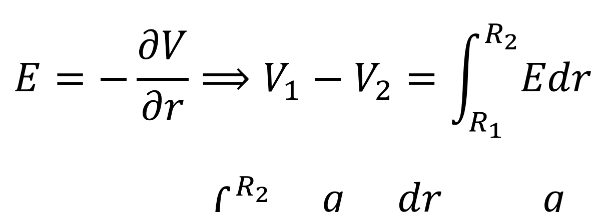
$$dR = \rho\frac{dr}{s} \Longrightarrow R = \frac{\rho}{2\pi L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

2. يُعطَى الحقل الكهربائي باستعمال نظرية غوص من أجل $R_2 < r < R_1$:



$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 rL}$$

و فرق الكمون بين الأسطوانتين:



$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} \Longrightarrow V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

و المقاومة:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{ES}{\rho}} = \frac{\frac{q\rho}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_2}{R_1}}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 rL}2\pi rL} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

6.3 جمع المقاومات

جمع المقاومات على التسلسل (***groupement en série***):

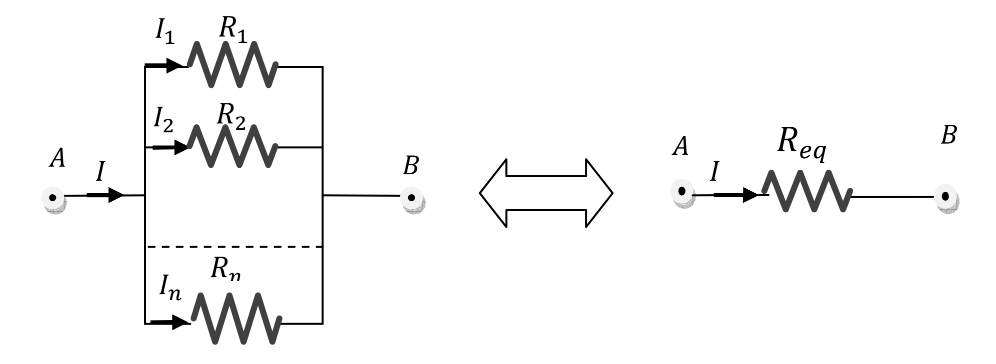
يسري في المقاومات التيار نفسه و فرق الكمون هو مجموع فروق الكمونات:

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) \ldots = R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I = R_{eq} I$$

المقاومة المكافئة:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (6)$$

جمع المقاومات على التفرع (***groupement en parallèle***):



كل المقاومات لها فرق الكمون نفسه:

$$V = V_A - V_B$$

المكثفة المكافئة تحمل تيار"ا:

$$I = I_1 + I_2 + \cdots = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \cdots + \frac{V}{R_n} = V \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \frac{V}{R_{eq}}$$

المقاومة المكافئة:

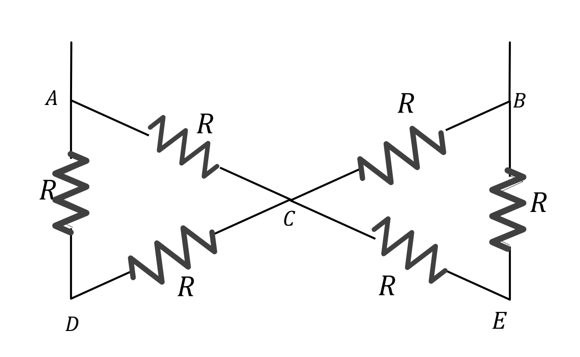
$$\frac{1}{q_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \qquad (7)$$

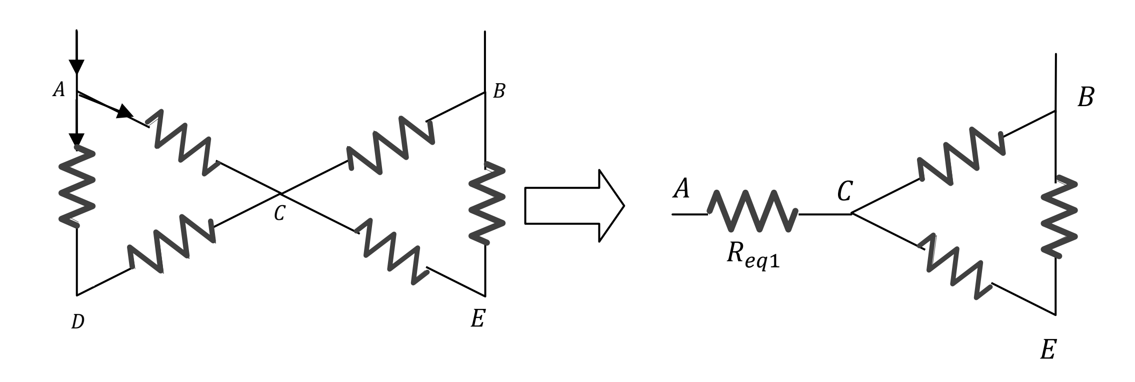
مثال 3: المقاومة المكافئة.

كل مقاومة R تساوي 3Ω في الشكل التالي.

1. أحسب المقاومة المكافئة بين A و B.

الحل:





المقاومة بين النقطتين A و D و المقاومة بين النقطتين D و C موجودتان على التسلسل، فالمقاومة المكافئة لهما R'_{eq1}:

$$R'_{eq1} = 3 + 3 = 6\Omega$$

المقاومة بين النقطتين A و C و المقاومة R'_{eq1} موجودتين على التفرع، و تكافئان مقاومة R_{eq1}:

$$R_{eq1} = \left(\frac{1}{R'_{eq1}} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = 2\Omega$$

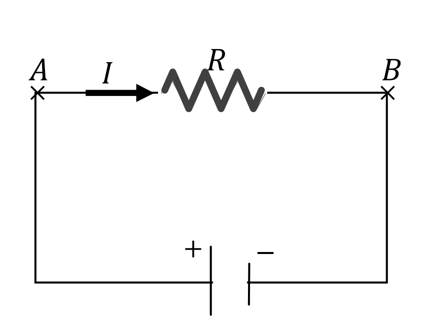
بالطريقة نفسها نحصل على المقاومة المكافئة بين النقطتين C و B، فتكون أيضا 2Ω.

و منه المقاومة المكافئة بين النقطتين A و B:

$$R_{eq} = R_{eq1} + R_{eq2} = 2 + 2 = 4\Omega$$

7.3 قانون جول

في حالة النظام المستقر، ليكن تيارٌ كهربائيٌ I يعبر مقاومة R موصولة تحت فرق كمون ثابت. عندما يسري هذا التيار لمدة زمنية t، فإن مقدارًا $q = It$ من الشحنة يكون قد تجول عبر هذه الدارة من خلال المولد، ويرافق ذلك تجول طاقة بين A و B مقدارها:



$$W = q(V_A - V_B) = It(V_A - V_B)$$

لدينا بين A و B ناقل مقاومته R فيكون:

$$V_A - V_B = \mathrm{RI} \Longrightarrow \mathrm{W} = \mathrm{RI}^2\mathrm{t}$$

يوافق استطاعة:

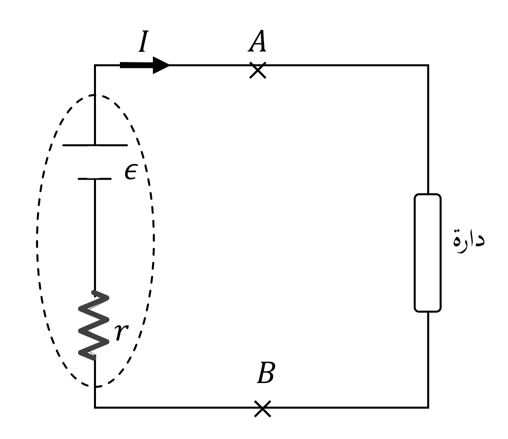
$$P = \frac{dW}{dt} = R\mathrm{I}^2 \qquad (8)$$

تبين التجربة أن هذه الطاقة تظهر على شكل حرارة ضائعة في المادة الناقلة إلى الخارج، و يدعى هذا الإصدار للحرارة بمفعول جول (*effet joule*).

الشبكات الكهربائية

8.3 القوة المحركة الكهربائية

أصل القوة المحركة الكهربائية (*force électromotrice*) في دارة تيار مستمر يكون ناتجًا عن بعض الآليات التي تنقل حاملات الشحنة داخل المولد في اتجاه معاكس لاتجاه القوة الكهربائية المؤثرة على حاملات الشحنة. القوة المحركة الكهربائية هي فرق الكمون المعطى من طرف المولد. وحدتها الفولط، و يعبر عنها باختصار ق.م. ك ($f.e.m$). سنرمز لها في الشبكات بـ ϵ.



في الواقع يمثّل المولد بدارة مكافئة تتكون من قوة محركة كهربائية ϵ موصولة على التسلسل مع مقاومة r تسمى المقاومة الداخلية للمولد. عندما نوصل بين طرفي هذا المولد دارة خارجية، فإن تيارًا I يمر في الدارة. يمكن التعبير عن موازنة الطاقة بمفهوم الاستطاعة:

- الاستطاعة المقدمة من طرف المولد: $P = \epsilon I$.
- الاستطاعة المستهلكة في الدارة الخارجية: $P = (V_A - V_B)I$
- الاستطاعة المستهلكة في المولد $P = rI^2$

$$\epsilon I = (V_A - V_B)I + rI^2 \qquad (9)$$

الجهد (الكمون) المستعمل بين طرفي المولد:

$$V_A - V_B = \epsilon - rI$$

نعرف مردود المولد على أنه النسبة بين الاستطاعة المستعملة في الدارة الخارجية و الاستطاعة الكهربائية المقدمة من طرف المولد، أي:

$$Ren = \frac{(V_A - V_B)I}{\epsilon I} = \frac{(V_A - V_B)}{\epsilon} \leq 1$$

ملاحظات:

- ✓ يكون المولد أكثر فعالية (المردود يقترب من 1) عندما يكون فرق الكمون بين طرفي مقاومته الداخلية r صغيرا جدا أو مهملة أمام قوته المحركة الكهربائية ϵ.
- ✓ عندما تكون المقاومة الداخلية للمولد كبيرة جدا أمام مقاومة الدارة المستخدمة، فإن المولد يصبح مولدا للتيار، و يعطى تيارا ثابتا، و ذلك مهما كانت مقاومة الدارة الخارجية.
- ✓ جمع المولدات على التسلسل: نقول عن مولدين أنهما على التسلسل إذا مر فيهما التيار نفسه و كان القطب الموجب (+) لأحدهما موصولا بالقطب السالب (−) للآخر.

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \,, \quad r = \sum_{i=1}^{n} r_i$$

9.3 القوة المضادة للقوة المحركة الكهربائية لعنصر استقبال

عنصر الاستقبال (*récepteur*)، هو جهاز هدفه تحويل الطاقة الكهربائية إلى شكل آخر للطاقة مثل: المحركات، المراكمات[4] (*accumulateurs*).... و لا يمكن تحقيق هذه العملية دون ضياع في الطاقة عن طريق مفعول جول في عنصر الاستقبال، لذلك يمثل عنصر الاستقبال بدارة مكافئة، تتكون من قوة مضادة للقوة المحركة الكهربائية (*force contre-électromotrice*)، وحدتها الفولط ويعبر عنها باختصار ق.م.م.ك ($f.c.e.m$) سنرمز لها بـ e، موصولة على التسلسل مع مقاومته الداخلية r'.

الاستطاعة المستقبلة في عنصر الاستقبال على شكل كهربائي تساوي $I(V_A - V_B)$ ، يحول منها استطاعة تساوي eI، و يضيع على شكل حراري استطاعة $r'I^2$. باستعمال موازنة الاستطاعة:

$$(V_A - V_B)I = eI + r'I^2 \qquad (10)$$

$$(V_A - V_B) = e + r'I$$

مردود جهاز الاستقبال يساوي النسبة بين الاستطاعة المستعملة التي يقدمها عنصر الاستقبال إلى الاستطاعة المستهلكة من طرفه:

$$Ren = \frac{eI}{(V_A - V_B)I} = \frac{e}{(V_A - V_B)} \leq 1$$

[4] المراكمات هي أجهزة تحول الطاقة الكهربائية إلى طاقة كيميائية.

10.3 تطبيق قانون أوم على دارة مغلقة

لتكن الدارة المغلقة من النقطة A إلى النقطة A، التي تحوي المولدات $(\sum \epsilon)$ وأجهزة الاستقبال $(\sum e)$ والمقاومات $(\sum R)$، اعتمادا على الدراسة السابقة، فإن الاستطاعة المقدمة من طرف المولدات، تستهلك من طرف أجهزة الاستقبال و المقاومات، أي:

$$I\sum \mathcal{E} = I\sum e + I^2\sum R \quad \text{(الاستطاعة)}$$

$$\sum \mathcal{E} = \sum e + I\sum R \quad \text{(فرق الكمون)}$$

تعني المعادلة الأخيرة أن تغير الكمون يكون معدوما على المسار المغلق $\sum \mathcal{E} - \sum e - I\sum R = V_A - V_A = 0$. نعتبر جزءًا من دارة، و ليكن AB يعبره التيار I من A إلى B فإذا احتوت على:

✓ مولد قوته المحركة الكهربائية ϵ:

$$V_A - V_B = -\epsilon$$

$$V_A - V_B = \epsilon$$

✓ مقاومة R :

$$V_A - V_B = RI$$

✓ عنصر استقبال قوته المضادة المحركة الكهربائية e:

$$V_A - V_B = e$$

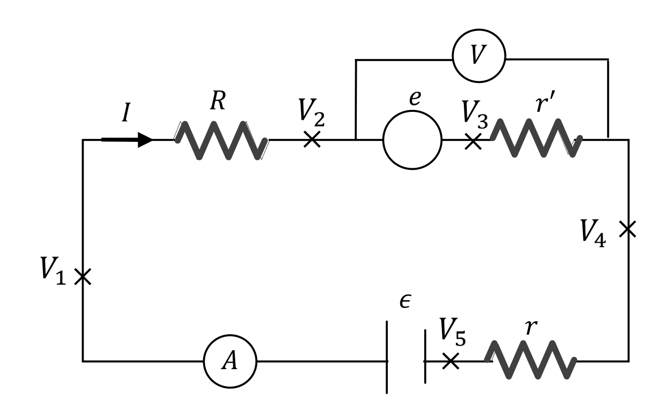
مثال 4: تطبيق قانون أوم على دارة.

دارة كهربائية مكونة من الأجهزة التالية المربوطة مع بعضها على تسلسل:

- مولد قوته المحركة الكهربائية $\epsilon = 230\text{V}$ و مقاومته الداخلية $r = 1\Omega$.
- مستقبل ق.م.م.ك $e = 50V$ و مقاومته الداخلية $r' = 4\Omega$.
- مقاومة $R = 40\Omega$.
- جهاز أمبيرومتر ذو مقاومة داخلية مهملة.
- جهاز فولطمتر مربوط بين طرفي عنصر الاستقبال ذو مقاومة لانهائية.

أعط القيمة المؤشر عليها في كل من جهاز الفولطمتر و الآمبيرومتر.

الحل:



مؤشر جهاز الآمبيرومتر (*ampèremètre*): بتطبيق قانون أوم على الدارة:

$$V_1 - V_1 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_4) + (V_4 - V_5) + (V_5 - V_1) = 0$$

$$RI + e + r'I + rI - \epsilon = 0$$

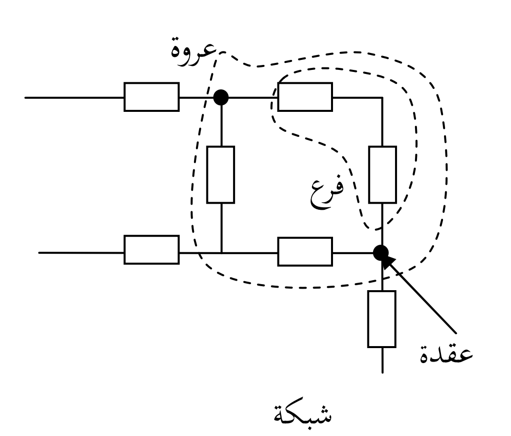
$$I = \frac{\epsilon - e}{R + r' + r} = \frac{230 - 50}{40 + 4 + 1} = 4\text{A}$$

مؤشر جهاز الفولتمتر (*voltmètre*):

$$V = e + r'I = 50 + 4 \times 4 = 66\text{V}$$

11.3 تعميم قانون أوم (قانونا كيرشوف)

في شبكة معقدة مكونة من مولدات وعناصر استقبال و مقاومات كما في الشكل نعرف:



- عقدة (*nœud*): كل نقطة التقاء أكثر من عنصرين.
- فرع (*branche*) : مجموعة العناصر المحصورة بين عقدتين متتاليتين.
- عروة (*maille*): كل مسار مغلق، يتكون من سلسلة من الفروع.

المسألة العامة في الشبكات: حساب شدة التيار التي تمر في كل فرع من الشبكة. لحل المسألة نستعمل قانوني كيرشوف المعرفين كما يلي:

✓ **قانون كيرشوف الأول (قانون العقد)**: و هو يمثل قانون انحفاظ الشحنة الكهربائية في العقدة، حيث أنه لا يمكن أن يكون هناك تراكم للشحنات في عقدة من الشبكة، أي أن مجموع شدات التيارات الكهربائية الداخلة إلى عقدة يساوي مجموع شدات التيارات الكهربائية الخارجة منها.

✓ **قانون كيرشوف الثاني (قانون العروات)**: و هو يمثل قانون انحفاظ الطاقة، حيث أن التغير الكلي للكمون على مسار عروة يساوي للصفر.

تطبيق قانوني كيرشوف على الشبكات: وضع المعادلات

- بعد رسم الشبكة.
- نحدد اختياريا اتجاه التيارات في كل فرع من الشبكة. لا نخشى من التخمين الخاطئ لاتجاه التيار، إن كانت الإجابة سالبة فإن هذا يعني الاتجاه الفعلي للتيار بعكس الاتجاه المختار لكن القيمة صحيحة، و هذا في حالة شبكة لا تحتوي على عنصر استقبال. إذا وجد عنصر

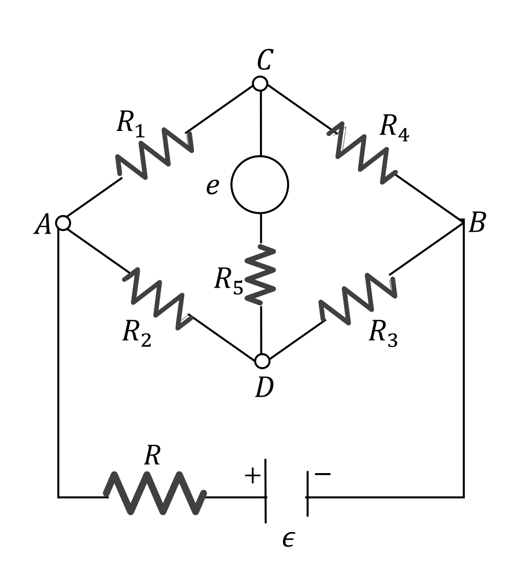
استقبال، و كان التيار المحسوب الذي يسري في الفرع الذي يحتوي عنصر الاستقبال سالبا، يجب هنا إعادة وضع معادلات المسألة آخذين الاتجاه الصحيح للتيار.

- نطبق قانون كيرشوف الأول (قانون العقد)، اذا كان لدينا n عقدة سنحصل على $n-1$ معادلة.
- نطبق قانون كيرشوف الثاني (قانون العروات)، إذا كان لدينا b فرعًا فإن عدد معادلات العروات $m = b - (n-1)$.
- نحصل على جملة من معادلات خطية، نختار فقط المعادلات المستقلة بعد اعتماد كل العقد و العروات، فإذا كان لدينا n تيارا نحصل على n جملة، و نحلها باستعمال الطرق الرياضية.

مثال 5: تطبيق قانوني كيرشوف على شبكة.

أوجد شدة التيار في كل فرع من الشبكة التالية.

$$R = R_1 = R_2 = R_5 = 20\Omega$$
$$R_3 = 10\Omega; \quad R_4 = 60\Omega$$
$$\mathrm{e} = 2\mathrm{V}\,; \quad \epsilon = 48\mathrm{V}$$



الحل:

في الشبكة لدينا:

- أربع عقد، أي ثلاث معادلات للتيار.
- ستة فروع، أي ثلاث معادلات للعروات.

قانون كيرشوف الأول يعطي:

العقدة A: $I = I_1 + I_2$ (1)

العقدة C: $I_4 = I_1 + I_5$ (2)

العقدة D: $I_2 = I_3 + I_5$ (3)

قانون كيرشوف الثاني يعطي:

العروة I:

$$R_1 I_1 - e - R_5 I_5 - R_2 I_2 = 0 \longrightarrow R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_2 I_2 = e \qquad (4)$$

العروة II:

$$R_5I_5+e+R_4I_4-R_3I_3=0\longrightarrow R_5I_5+R_4I_4-R_3I_3=-e \qquad (5)$$

العروة III:

$$\mathrm{R}I-\varepsilon+R_2I_2+R_3I_3=0\longrightarrow \mathrm{R}I+R_2I_2+R_3I_3=\varepsilon \qquad (6)$$

من المعادلات (1) و (2) و (3) نستخرج قيم I_2 و I_3 و I_5 بدلالة I و I_1 و I_4:

$$I_2=I-I_1$$
$$I_3=I-I_4$$
$$I_5=I_4-I_1$$

ونعوضهم في المعادلات (4) و (5) و (6) فنحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases}(R_1+R_2+R_5)I_1-R_5I_4-R_2I=e\\-R_5I_1+(R_3+R_4+R_5)I_4-R_3I=-e\\-R_2I_1-R_3I_4-(R_3+R_2+R)I=\varepsilon\end{cases}$$

$$\begin{cases}3I_1-I_4-I=0.1\\-2I_1+9I_4-I=-0.2\\-2I_1-1I_4-5I=4.8\end{cases}$$

حل هذه الجملة بطريقة كرامر (*Cramer*) يعطى:

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix}0.1&-1&-1\\-0.2&9&-1\\4.8&-1&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-2&9&-1\\-2&-1&-5\end{vmatrix}}=0{,}512\ \mathrm{A}$$

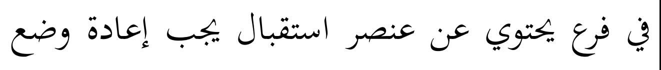
$$I_4=\frac{\begin{vmatrix}3&0.1&-1\\-2&-0.2&-1\\-2&4.8&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-2&9&-1\\-2&-1&-5\end{vmatrix}}=0{,}226\ \mathrm{A}$$

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0.1 \\ -2 & 9 & -0.2 \\ -2 & -1 & 4.8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 9 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix}} = 1,21\ \text{A}$$

و:

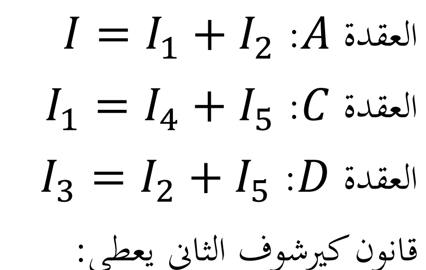
$$I_2 = I - I_1 = 1,21 - 0,512 = 0,698\ \text{A}$$
$$I_3 = I - I_4 = 1,21 - 0,226 = 0,984\ \text{A}$$
$$I_5 = I_4 - I_1 = 0,226 - 0,512 = -0,286\ \text{A}$$

I_5 سالبة، إذًا الجهة الفعلية لـ I_5 هي عكس الجهة المختارة عشوائيا في الشبكة، و بما التيار يسري


في فرع يحتوي عن عنصر استقبال يجب إعادة وضع

المعادلات و نأخذ الاتجاه الصحيح لـ I_5:


قانون كيرشوف الأول يعطي:


العقدة A: $I = I_1 + I_2$

العقدة C: $I_1 = I_4 + I_5$

العقدة D: $I_3 = I_2 + I_5$

قانون كيرشوف الثاني يعطي:

العروة I:

$$R_1 I_1 + e + R_5 I_5 - R_2 I_2 = 0 \longrightarrow R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_2 I_2 = -e$$

العروة II:

$$-R_5 I_5 - e + R_4 I_4 - R_3 I_3 = 0 \longrightarrow -R_5 I_5 + R_4 I_4 - R_3 I_3 = e$$

العروة III:

$$\text{R}I - \varepsilon + R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \longrightarrow \text{R}I + R_2 I_2 + R_3 I_3 = \varepsilon$$

من المعادلات (1) و (2) و (3) نستخرج قيم I_2 و I_3 و I_5 بدلالة I و I_1 و I_4:

$$I_2 = I - I_1$$
$$I_3 = I - I_4$$
$$I_5 = I_1 - I_4$$

بنفس الخطوات السابقة سنحصل على الجملة التالي:

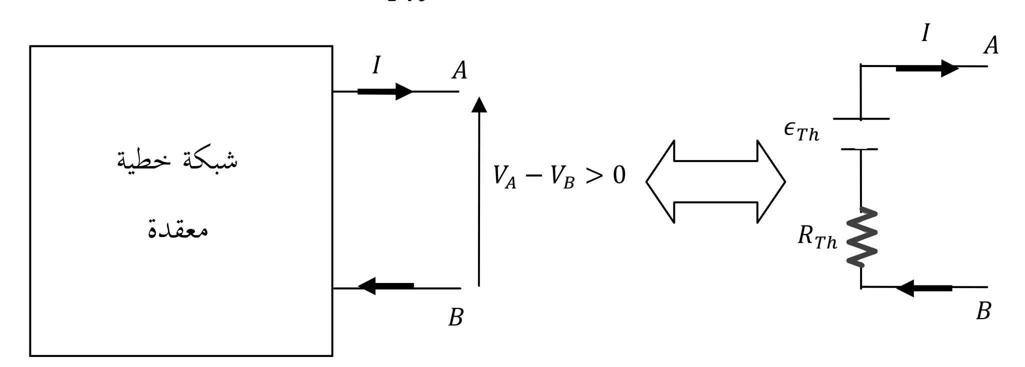
$$\begin{cases} 3I_1 - I_4 - I = -0{,}1 \\ -2I_1 + 9I_4 - I = 0.2 \\ -2I_1 - I_4 + 5I = 4.8 \end{cases}$$

حل هذه الجملة بطريقة كرامر (*Cramer*) يعطى:

$$I_1 = 0.448 \text{ A}, \quad I_4 = 0.254 \text{ A}, \quad I = 1.19 \text{ A}$$
$$I_2 = 0.742 \text{ A}, \quad I_3 = 0.936 \text{ A}, \quad I_5 = 0.194 \text{ A}$$

12.3 نظرية تفنا

نص نظرية تفنا (***théorème de Thévenin***): كل شبكة خطية محصورة بين طرفين A و B، مهما كانت معقدة، تكافؤ مولدًا وحيدًا قوته المحركة الكهربائية ϵ_{Th} ومقاومته الداخلية R_{Th}، بحيث:



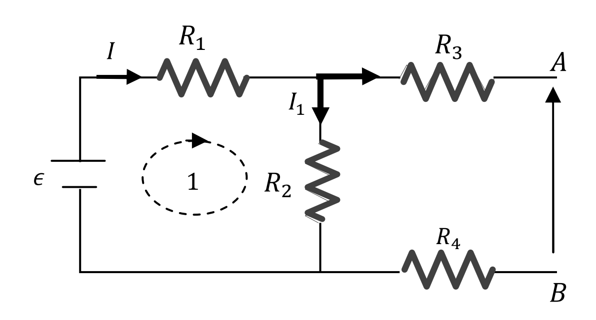
1. ϵ_{Th} هي فرق الكمون المقاس بين الطرفين A و B عندما يكون التوصيل بين A و B محذوف (دارة مفتوحة).
2. R_{Th} هي المقاومة المكافئة بين الطرفين A و B مع حذف التوصيل بين A و B و أيضا كل مصادر الكمون والتيار.

مثال: تطبيق لنظرية تفنا.

نعتبر الدارة الكهربائية الموضحة في الشكل التالي. أوجد المولد المكافئ للدارة باستعمال نظرية تفنا.

الحل:

حسب تعريف ϵ_{Th} لدينا:



الدارة مفتوحة بين طرفين A و B أي $I_2 = 0$ و $I = I_1$

$$\epsilon_{Th} = V_A - V_B = R_2 I$$

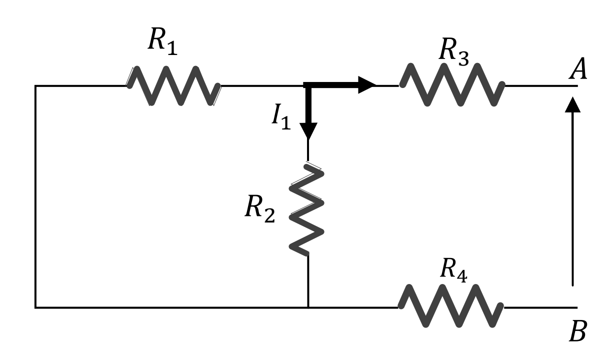
و من جهة ثانية بتطبيق قانون العروة على العروة 1 :

$$(R_1 + R_2)I - \epsilon = 0 \Rightarrow I = \frac{\epsilon}{R_1 + R_2}$$

و منه

$$\epsilon_{Th} = \frac{R_2 \epsilon}{R_1 + R_2}$$

و لحساب R_{Th} نبقي على الدارة مفتوحة بين طرفين A و B، و نحذف المولد الكهربائي و نحسب المقاومة المكافئة للتركيب التالي:



$$R_{Th} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_4$$

فقرة اختيارية للفصل الثالث

المقاومة ودرجة الحرارة

تؤثر درجة الحرارة على الشكل الهندسي، لكن يعتبر هذا التأثير ضعيفا عند مقارنته بمفعولها على المقاومية. تتغير المقاومية ρ بالنسبة للمعادن تقريبا بشكل خطي مع درجة الحرارة T وفق المعادلة التالية:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

حيث ρ_0 هي المقاومية عند درجة حرارة معينة T_0 (تؤخذ عادة $20°C$). و α هو معامل درجة الحرارة للمقاومية، و وحدته هي مقلوب الدرجة المئوية $[°C]^{-1}$. تغير المقاومة مع درجة الحرارة يتبعه بالضرورة تغير المقاومة R وفق القانون التالي:

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

يعرض الجدول التالي مقاومية و معامل درجة الحرارة لمواد مختلفة عند درجة حرارة $20°C$

المادة	المقاومية (Ωm)	المعامل α $[°C]^{-1}$
الفضة	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
النحاس	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
الذهب	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
الألمنيوم	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
التنغستن	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
الحديد	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
بلاتنيوم	11×10^{-8}	3.92×10^{-3}
الرصاص	22×10^{-8}	3.9×10^{-3}
نيكل-كروم	1.50×10^{-6}	0.4×10^{-3}
الكربون	3.5×10^{-5}	-0.5×10^{-3}

الجرمانيوم	0.46	-48×10^{-3}
السليكون	640	-75×10^{-3}
الزجاج	10^{10} الى 10^{14}	
المطاط القاسي	$\approx 10^{13}$	
الكبريت	10^{15}	
الكوارتز (المنصهر)	75×10^{16}	

نلاحظ أن هناك مدى واسعًا من قيم المقاومية الصغيرة جدًا للنواقل الجيدة مثل النحاس و الفضة، إلى القيم الكبيرة جدا للعوازل الجيدة مثل الزجاج و المطاط. إن الناقل المثالي يمتلك مقاومية صفرًا و العازل المثالي يمتلك مقاومية لانهائية. تزداد المقاومية بالنسبة للمعادن بازدياد درجة الحرارة. بينما بالنسبة إلى لأشباه النواقل (الكربون، الجرمانيوم ...)، فإن العكس هو الذي يحدث، مقاوميتها تزداد كلما انخفضت درجة الحرارة (قيم α سالبة).

الفصل الرابع

المغناطيسية في الفراغ

في الطبيعة، بالإضافة إلى التفاعلات الكهربائية المدروسة في الفصول السابقة هناك أيضا التفاعلات المغناطيسية بين الجسيمات، و هي أقدم تفاعل عرفه الإنسان، فقد لوحظ منذ قرون أن هناك مواد موجودة في الطبيعة لها خاصية جذب برادة الحديد، تدعى بالمغناطيس مثل: أكسيد الحديد Fe_3O_4. يمكن للجسم أن يكتسب الخاصية السابقة، جذب برادة الحديد عن طريق التأثير أو دلكه بمغناطيس، و يسمى في هذه الحالة جسمًا ممغنطا.

تعني كلمة المغناطيس " السحر" و مصدرها من اسم مدينة في آسيا تدعى "مغنيزيا". يختلف التفاعل المغناطيسي تماما عن تفاعل الجاذبية و التفاعل الكهربائي.

1.4 خصائص المغناطيس

أجريت عدة تجارب منذ 1269م وضَّحت أنه ليست كل مناطق الجسم الممغنط متساوية الأثر، بل تتمركز في قطبين يسميان القطب الشمالي و القطب الجنوبي، و تعود تسمية الأقطاب إلى أنه لو علق قضيب مغناطيسي من وسطه، و كان بإمكانه التحرك بحرية في مستوٍ أفقي، فإنه سيدور حتى يؤشر قطبه الشمالي باتجاه القطب الجغرافي الشمالي للأرض، و قطبه الجنوبي باتجاه القطب الجنوبي الأرضي[5]. و أوضحت أيضا أن الأقطاب المتشابهة تتنافر، و الأقطاب المختلفة تتجاذب. تتواجد الأقطاب كأزواج لا يمكن عزلها، و مهما كانت المرات التي تقسم فيها المغناطيس إلى قسمين فإن كل قطعة تمتلك دائما قطبًا شماليًا و آخر جنوبيًا.

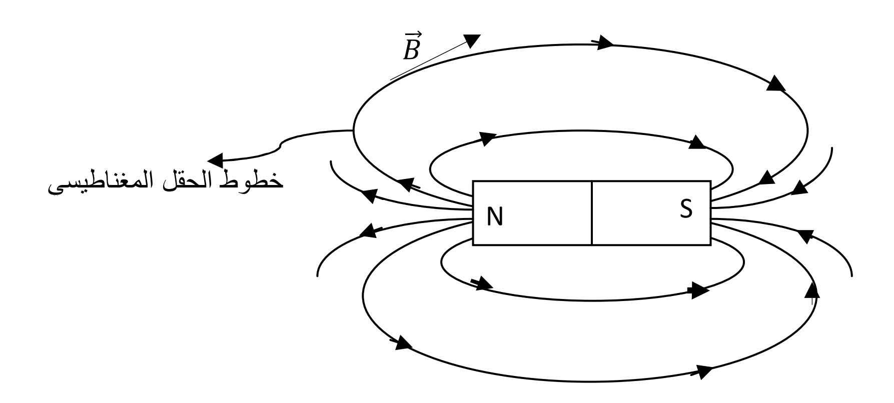
من خلال التشابه الكبير بين التفاعلات الكهربائية و التفاعلات المغناطيسية، تم تفسير الظواهر المغناطيسية من خلال التأثيرات الكهربائية، فدلك مطاط بالصوف يؤدي إلى شحنه،

---

[5] تعتبر الأرض مغناطيسا دائما كبيرا يعادل 10^{-4} تسلا، و بما أن الأقطاب تتجاذب إذا كانت مختلفة، و القطب الشمالي للمغناطيس ينجذب نحو القطب الشمالي الجغرافي للأرض، نستنتج ان القطب الجغرافي الجنوبي الأرضي هو الشمال لمغنطيس الأرض و الشمالي هو الجنوب للمغناطيس الأرضي.

موضوعيا أحدهما موجب و الثاني سالب، و بالتشابه يمكن أيضا مغنطة قطعة من الحديد غير ممغنطة بدلكها بمغناطيس أو بتقريبها من قطعة أخرى ممغنطة.

يتميز الفضاء المحيط بالمغناطيس بحقل يدعى الحقل المغناطيسي(*champ magnétique*) يرمز له بـ $\vec{B}$، إتجاهه هو الذي تؤشر عليه البوصلة، و هو مماسي في أي نقطة لخطوط الحقل المغناطيسي.



نتمكن من مشاهدة أهداب أو خطوط الحقل بنشر برادة الحديد حول المغناطيس، نلاحظ خطوطًا تشبه خطوط الحقل لثنائي القطب الكهربائي. إن دراسة التفاعل المغناطيسي ليست من البساطة مثل دراسة التفاعل الكهربائي، و سوف نبدأ بالحالة البسيطة دراسة شحنة منفردة متحركة ثم نعمم النتيجة على مجموعة من الشحنات متحركة، أي التيار.

2.4 القوة المغناطيسية المؤثرة على شحنة نقطية متحركة

أكدت التجارب التي أجريت على جسيمات مشحونة مختلفة متحركة تخضع الى حقل مغناطيسي $\vec{B}$ أن :

- ✓ مقدار القوة المغناطيسية (*force magnétique*) $\vec{F}$ المؤثرة على جسم مشحون تتناسب مع شحنته q و سرعته v، حيث تعطَى طويلة القوة :

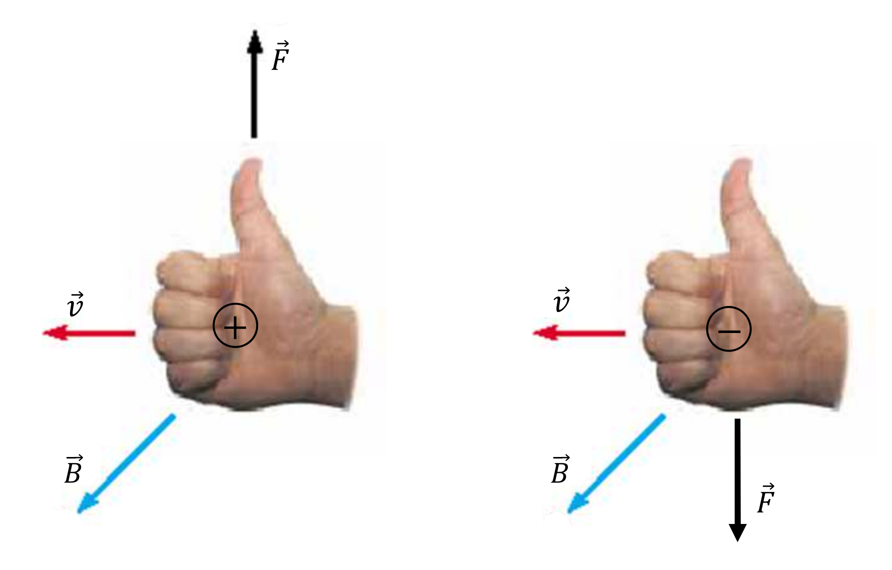
$\vec{F}$ $\vec{B}$ θ $q > 0$ $\vec{v}$

$$F = qvBsin(\vec{v}, \vec{B}) = qvBsin\theta$$

- ✓ القوة المغناطيسية $\vec{F}$ متعامدة مع شعاع السرعة و شعاع الحقل المغناطيسي في آن واحد، أي:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (1)$$

✓ لتعيين الاتجاه نطبق قاعدة اليد اليمنى.



✓ تبلغ القوة المغناطيسية قيمتها العظمى عند $\theta = \frac{\theta}{2}$، أي $F = qvB$

✓ وحدة الحقل المغناطيسي في النظام الدولي هي التسلا حيث: $T = Ns/Cm$

3.4 اختلافات بين القوة الكهربائية و القوة المغناطيسية

رغم أوجه الشبه الكبير بين القوة الكهربائية و قوة المغناطيسية إلا أنه أيضا هناك اختلاف:

✓ تعمل القوة الكهربائية باتجاه الحقل الكهربائي، بينما تعمل القوة المغناطيسية عموديا على الحقل المغناطيسي.

✓ تعمل القوة الكهربائية على جسم مشحون بغض النظر عن حركة أو سكون هذا الجسم، بينما تعمل القوة المغناطيسية على جسم مشحون فقط عندما يكون متحركا.

✓ تنجز القوة الكهربائية عملا في إزاحة الجسم المشحون، بينما لا تنجز القوة المغناطيسية للحقل المغناطيسي المستقر أي عملٍ عندما ينزاح الجسم.

ملاحظة:

✓ عندما يخضع جسم مشحون إلى حقل كهربائي و حقل مغناطيسي معا فسوف يخضع إلى قوة لورنتز: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$.

✓ القوة المغناطيسية هي قوة مركزية. نأخذ الحالة $\vec{B} \perp \vec{v}$ أي:

$$F = m\frac{v^2}{\rho} = qvB \implies \rho = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{\omega}$$

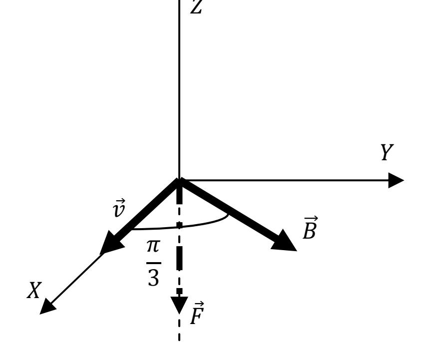
حركة دائرية منتظمة نصف قطرها ρ و سرعتها الزاوية $\omega = \frac{qB}{m}$، و تسمى تردد السيكلوترون.

مثال 1: القوة المغناطيسية المؤثرة على إلكترون.

يتحرك إلكترون باتجاه المحور OX بسرعة $8 \times 10^6 \mathrm{m/s}$ و يخضع إلى حقل مغناطيسي قيمته $0{,}025\mathrm{T}$ يصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع المحور OX، و يقع في المستوي OXY. أحسب القوة المغناطيسية و التسارع للإلكترون.

الحل:

القوة المغناطيسية :



$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

اتجاه الجداء الشعاعي محمول على المحور OZ الموجب لكن القوة تأخذ الاتجاه السالب، لأن شحنة الإلكترون سالبة:

$$\vec{F} = -F\vec{k}$$

$$F = evB\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= 1{,}6 \times 10^{-19}.8 \times 10^6.0{,}025.\sin\frac{\pi}{3} = 2{,}8 \times 10^{-14}\mathrm{N}$$

التسارع:

$$\gamma = \frac{F}{m_e} = \frac{2{,}8 \times 10^{-14}(N)}{9{,}11 \times 10^{-31}(kg)} = 0{,}31 \times 10^{17}\mathrm{ms}^{-2}$$

4.4 القوة المغناطيسية المؤثرة على تيار كهربائي– قوة لابلاس

التيار الكهربائي عبارة عن سريان لشحنات كهربائية، إذا وضع هذا التيار تحت تأثير حقل مغناطيسي فسيعاني من قوة مغناطيسية. لدينا من الفصل السابق أن كثافة التيار المعرفة بالشحنة المارة في وحدة الزمن عبر وحدة المساحة:

$$\vec{\imath} = nq\vec{v}$$

إذا كان لدينا S مقطع ناقل عمودي على $\vec{i}$ فيكون

$$I = Si = n.S.qv$$

إذا كان هذا الناقل موجودًا في حقل مغناطيسي $\vec{B}$ فإن القوة المؤثرة على وحدة الحجم:

$$\vec{f} = nq\vec{v} \times \vec{B} = \vec{i} \times \vec{B}$$

فالقوة الكلية المؤثرة على عنصر الطول $d\vec{l}$:

$$d\vec{F} = \vec{f}Sdl = Sdl\vec{i} \times \vec{B} = Id\vec{l} \times \vec{B} \qquad (2)$$

و القوة الكلية:

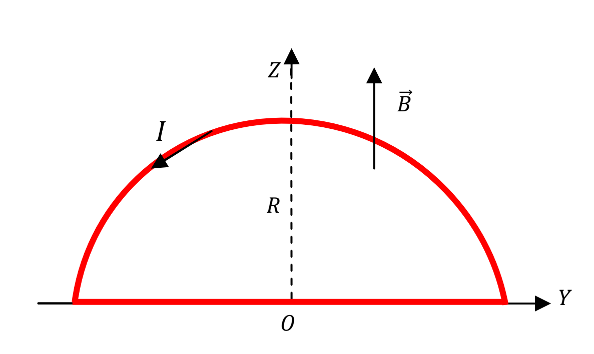
$$\vec{F} = I\int_{\text{طول الدارة}} d\vec{l} \times \vec{B}$$

تسمى هذه العلاقة بقانون لابلاس (*loi de Laplace*).

ملاحظة: محصلة القوة المغناطيسية على أي دارة مغلقة موجودة تحت تأثير حقل مغناطيسي منتظم تكون معدومة.

مثال 2: القوة المغناطيسية المؤثرة على سلك دائري.

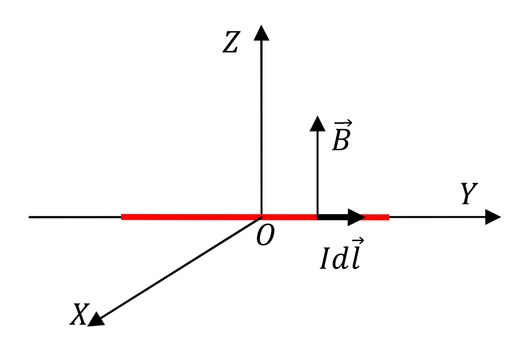
سلك على شكل نصف دائرة مغلقة نصف قطرها R، يمر بها تيار كهربائي I، وتقع في حقل مغناطيسي $\vec{B}$ منتظم موجه نحو المحور OZ الموجب، كما هو موضح في الشكل.



أوجد اتجاه و مقدار القوة المغناطيسية المؤثرة على الجزء المستقيم ثم الجزء المنحني من الدارة. إستنتج القوة الكلية على كامل السلك.

الحل:

القوة المغناطيسية على الجزء المستقيم: نطبق قانون لابلاس:



$$d\vec{F}_1 = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

اتجاه القوة نحو OX الموجب و طويلتها تعطَى:



$$dF_1 = IB\sin\frac{\pi}{2}dl \rightarrow F_1 = IB\int_{-R}^{R} dl$$

$$\vec{F}_1 = 2RIB\vec{\imath}$$

القوة المغناطيسية المؤثرة على الجزء المنحني:

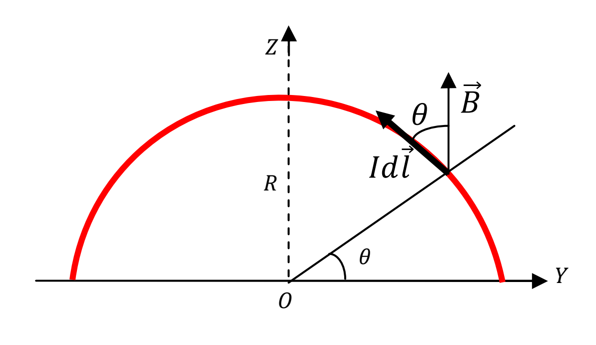
$$d\vec{F}_2 = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

اتجاه القوة على الجزء المنحني نحو OX السالب :

$$dF_2 = IB\sin\theta\, dl$$

$$F_2 = IBR\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

$$= IBR[-\cos\theta]_0^{\pi}$$



$$\vec{F}_2 = -2RIB\vec{\imath}$$

القوة المغناطيسية الكلية:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

5.4 الحقل المغناطيسي الناشئ عن شحنة نقطية متحركة

الحقل المغناطيسي الناشئ في النقطة M من طرف شحنة نقطية q تتحرك بسرعة $\vec{v}$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \vec{u}}{r^2}$$

حيث: $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$.

الثابت μ_0 يسمى نفاذية الفراغ أو السماحية (*perméabilité du vide*)، و تساوي $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} T.m.A^{-1}$ وتتعلق بـ ε_0 بالعلاقة $\mu_0\varepsilon_0 C^2 = 1$.

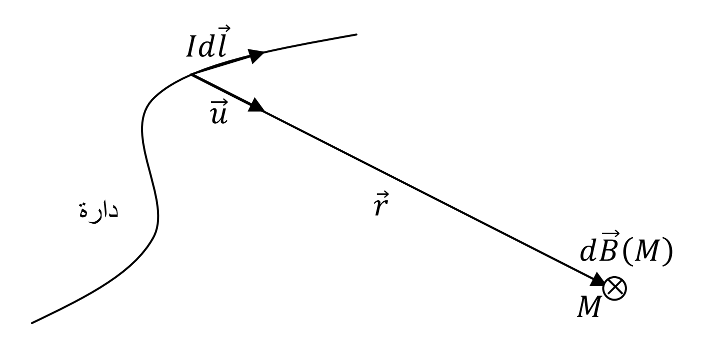
6.4 الحقل المغناطيسي الناتج عن مجموعة من الشحنات النقطية المتحركة

ليكن لدينا N شحنة نقطية q_i تتحرك بسرعة $\vec{v}_i$، بتطبيق مبدأ التجميع، يكون الحقل المغناطيسي الناتج في النقطة M نتيجة لهذه الشحن هو المجموع الشعاعي للحقول:

$$\vec{\mathrm{B}}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i\vec{v}_i \times \vec{u}_i}{r_i^2}$$

7.4 الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار كهربائي –قانون بيووسافار

ليكن لدينا عنصر طول من الدارة dl متميز بالمتجه $d\vec{l}$، يولد هذا العنصر في نقطة M حقلًا مغناطيسيا عنصريًا $d\vec{\mathrm{B}}$ يعطى بقانون بيو وسفار (*loi de Biot et Savard*):

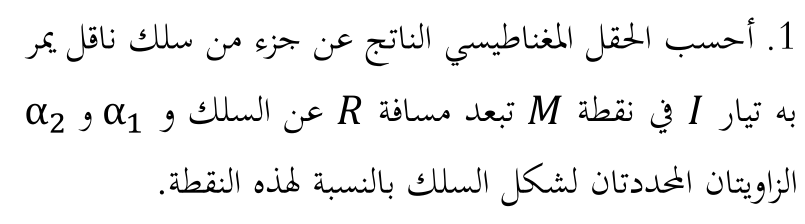


$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{Id\vec{l} \times \vec{u}}{r^2}$$

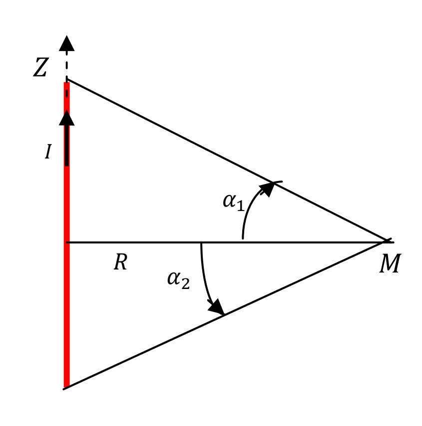
و يُعطى الحقل الكلي $\vec{\mathrm{B}}$ في النقطة M الناشئ عن كل الدارة :

$$\vec{\mathrm{B}}(M) = \int_{\text{دارة}} d\vec{B}\,(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \int_{\text{دارة}} \frac{Id\vec{l} \times \vec{u}}{r^2}$$

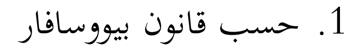
مثال.3: الحقل المغناطيسي الناتج على سلك ناقل حامل للتيار.

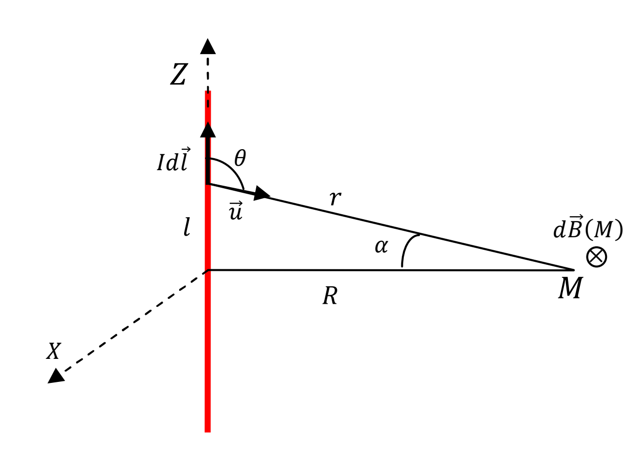


1. أحسب الحقل المغناطيسي الناتج عن جزء من سلك ناقل يمر به تيار I في نقطة M تبعد مسافة R عن السلك و α_1 و α_2 الزاويتان المحددتان لشكل السلك بالنسبة لهذه النقطة.
2. استنتج الحقل المغناطيسي في حالة سلك لانهائي الطول.
3. باستعمال نتيجة السؤال الأول أوجد الحقل الناشئ في مركز مربع طول ضلعه a، يحمل تيارًا I.



الحل:

1. 
حسب قانون بيووسافار



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{\mu}}{r^2}$$

الحقول المغناطيسية العنصرية لها الحامل نفسه و الاتجاه نفسه، و منه $\vec{B}$ موجها وفق المحور OX السالب:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

لدينا:

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}, \tan\alpha = \frac{l}{R} \Longrightarrow dl = \frac{R}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\sin\theta = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha; \quad \cos\alpha = \frac{R}{r} \Longrightarrow r = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\alpha\, d\alpha \Rightarrow$$

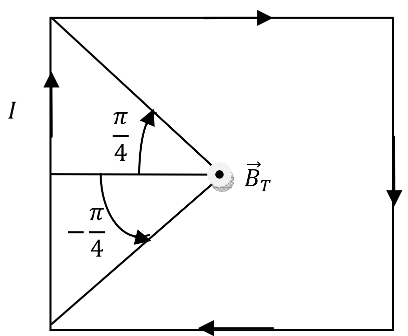
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$

2. بالنسبة لسلك لانهائي الطول $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ و $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

3. بالنسبة للمربع، نحسب الحقل المغناطيسي الناتج عن ضلع واحد في مركز المربع: $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ و $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sqrt{2}$$



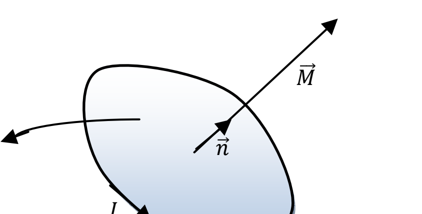
ثم نقوم بالجمع الشعاعي للحقول للأضلع الأربعة:

$$B_T = 4B_1 \rightarrow B_T = \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi a}$$

8.4 ثنائي القطب المغناطيسي

ثنائي القطب المغناطيسي هو دارة صغيرة مساحتها S غير محددة الشكل يعبرها تيار I .

نعرف عزم ثنائي القطب المغناطيسي (*moment magnétique dipolaire*):



$$\vec{M} = I\vec{S} = IS\vec{n}$$

إذا وضعت هذه الدارة في مجال مغناطيسي $\vec{B}$ خارجي فإنها ستخضع لمزدوجة قوى مغناطيسية (*couple magnétique*)، يُعطَى عزمها بالعلاقة التالية:

$$\vec{L} = \vec{M} \times \vec{B}$$

و الطاقة الكامنة للتفاعل بين هذه الدارة و الحقل المغناطيسي الخارجي:

$$E_P = -\vec{M}.\vec{B}$$

من هذه العلاقة، نجد أن ثنائي القطب المغناطيسي يمتلك أقل قيمة للطاقة الكامنة للتفاعل مع الحقل المغناطيسي الخارجي و تساوي $(-MB)$، حيث إن $\vec{M}$ موازي و بالاتجاه نفسه مع $\vec{B}$. و إن ثنائي القطب يمتلك اعظم قيمة للطاقة و تساوي $(+MB)$ حيث إن $\vec{M}$ موازي و باتجاه معاكس إلى $\vec{B}$.

ملاحظات:

- ✓ العلاقات السابقة تشبه العلاقات الخاصة بثنائي القطب الكهربائي.
- ✓ إذا كانت الدارة مكونة من N لفة، كل منها يحمل التيار نفسه و المساحة نفسها، فإن العزم يعطى: $\vec{L} = N\vec{M} \times \vec{B}$.

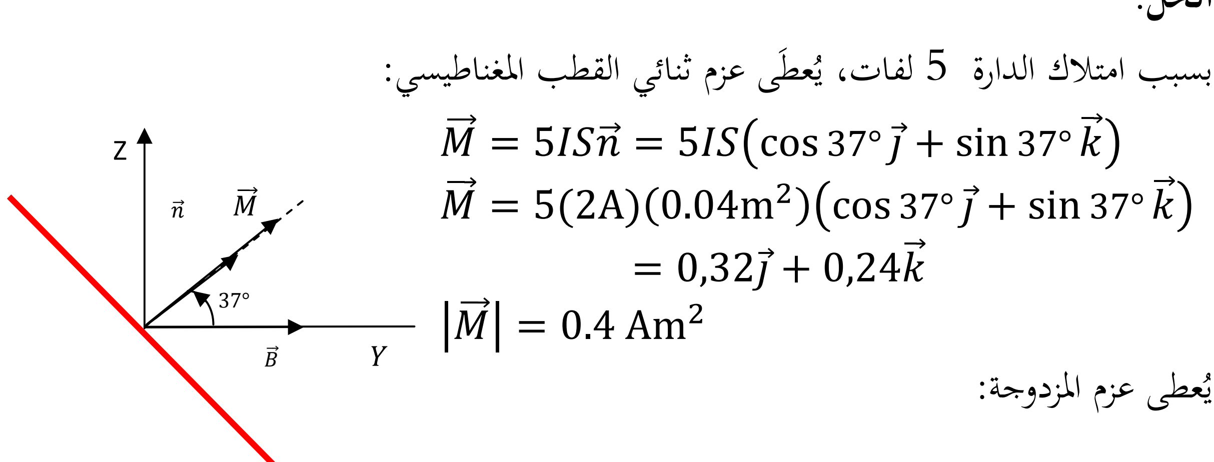
مثال 4: عزم مزدوجة لسلك مربع.

سلك مربع طول ضلعه $a = 20\text{cm}$ يتكون من 5 لفات ويحمل تيارًا $I = 2\text{A}$، وضع بحيث يصنع الناظم على مستواه زاوية $37°$ مع متجه حقل مغناطيسي منتظم شدته $B = 0.5\text{T}$. أحسب:

1. عزم مزدوجة القوى المؤثرة على الدارة.
2. العمل اللازم لإدارة المربع إلى وضع الطاقة الصغرى.

الحل:

بسبب امتلاك الدارة 5 لفات، يُعطَى عزم ثنائي القطب المغناطيسي:



$$\vec{M} = 5IS\vec{n} = 5IS(\cos 37°\,\vec{j} + \sin 37°\,\vec{k})$$

$$\vec{M} = 5(2\text{A})(0.04\text{m}^2)(\cos 37°\,\vec{j} + \sin 37°\,\vec{k})$$

$$= 0{,}32\vec{j} + 0{,}24\vec{k}$$

$$|\vec{M}| = 0.4\ \text{Am}^2$$

يُعطى عزم المزدوجة:

$$\vec{L} = \vec{M} \times \vec{B} = (0{,}32\vec{j} + 0{,}24\vec{k}) \times (0{,}5\vec{j}) = -0{,}12\vec{i}$$

$$L = MB\sin 37° = 0{,}12\ \text{Nm}$$

الطاقة الكامنة للتفاعل بين الدارة و الحقل المغناطيسي تعطى في هذه الحالة:

$$E_{pi} = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -MB\cos 37° = -0{,}16\ \text{J}$$

الطاقة الكامنة الصغرى:

$$E_p^{\text{min}} = E_{pf} = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -MB = -0{,}2\ \text{J}$$

العمل اللازم لإدارة الدارة:

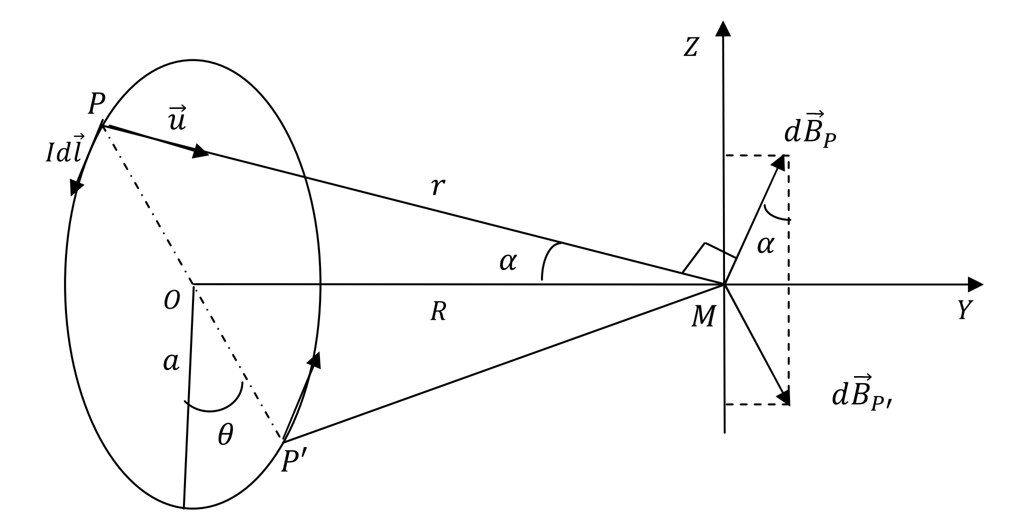
$$W = -\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = (-MB\cos 37°) - (-MB) = 0.04\ \text{J}$$

مثال5: الحقل المغناطيسي المتولد عن حلقة تيار.

لنعتبر تيارا دائريا نصف قطره a، لنحسب الحقل المغناطيسي في نقطة M موجودة على محور الحلقة.

الحل:

كل عنصر $d\vec{l}$ من الدارة يولد في النقطة M حقلًا عنصريًا $d\vec{B}$:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{u}}{r^2},\ \ dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\left(d\vec{l},\vec{u}\right)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$$

حيث: $\left(\widehat{d\vec{l},\vec{u}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

بالإسقاط نجد أن الحقل المغناطيسي:

$$d\vec{B}(M) = dB_y\vec{j} + dB_z\vec{j} = dB\sin\alpha\,\vec{j} + dB\cos\alpha\,\vec{k}$$

بفعل التناظر تنعدم مركبة الحقل المغناطيسي على المحور OZ:

$$d\vec{B}(M) = dB\sin\alpha\,\vec{j} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{r}\quad ,\ r^2 = a^2 + R^2\ ,\ dl = ad\theta$$

$$B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{Ia^2}{(a^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2+R^2)^{3/2}}$$

إذا كانت لدينا وشيعة مسطحة عدد لفاتها N :

$$B(M) = \frac{N\mu_0 Ia^2}{2(a^2+R^2)^{3/2}}$$

الحقل المغناطيسي في مركز الحلقة أي $R = 0$:

$$B(O) = \frac{N\mu_0 I}{2a}$$

يكتب الحقل المغناطيسي بدلالة عزم المزدوجة:

$$\vec{M} = I\vec{S} = I\pi a^2\vec{j}$$

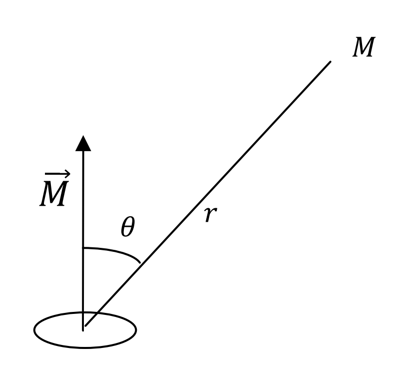
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2\pi(a^2 + R^2)^{3/2}}$$

إذا كانت أبعاد الدارة صغيرة جدًا، أي $a << R$ فإن الحقل المغناطيسي في اتجاه العزم $\vec{M}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{M}}{R^3}$$

ملاحظة:

هناك تشابه بين ثنائي القطب الكهربائي و ثنائي القطب المغناطيسي، لذلك يمكن كتابة علاقة الحقل المغناطيسي الناتج عن ثنائي المغناطيسي في نقطة خارج المحور تمثل في المعلم القطبي بـ $M(r,\theta)$:

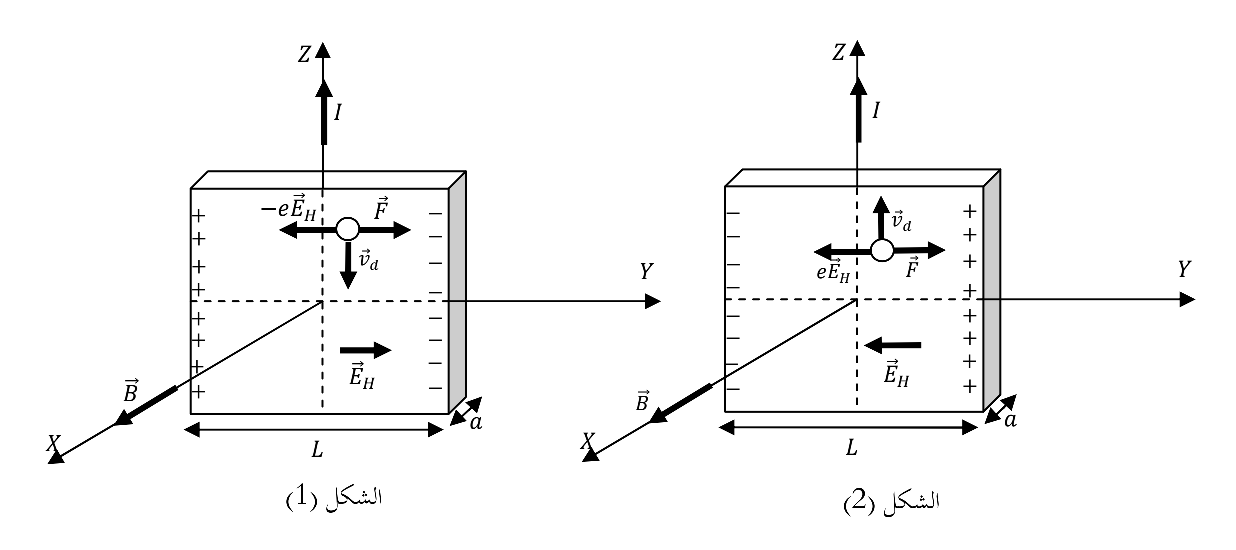


$$\vec{B} = \begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2M\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{M\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

فقرة اختيارية للفصل الرابع

فعل هول

أكتشف هذا الفعل من طرف هول (*Edwin Hall* 1855-1938) سنة 1879. و يتمثل في أنه لو وضعت صفيحة معدنية تحت تأثير حقل مغناطيسي عمودي عليها، و يمر في اتجاه طولها تيار كهربائي سيحصل انحراف الشحنة إلى أحد جوانب الصفيحة، أي ظهور فرق كمون بين حافتيها. يوفر فعل هول معلومات حول إشارة الشحنة و كثافتها.



الشكل (1) الشكل (2)

لنعتبر التيار يسري في الصفيحة في اتجاه OZ الموجب و لنعتبر أن الشحنة هي الإلكترونات (سالبة). عند تطبيق حقل مغناطيسي عمودي على الصفيحة، أي في اتجاه OX الموجب، أنظر إلى الشكل (1) فإن الإلكترونات ستخضع إلى قوة مغناطيسية تعطى:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = (-e)(-v_d\vec{k}) \times (B\vec{\imath})$$

$$\vec{F} = ev_dB\vec{\jmath}$$

أي أن الإلكترونات التي كانت تنتقل بسرعة متوسطة $\vec{v}_d$ في اتجاه المحور OZ السالب ستنحرف و تتجمع عند الجانب الأيمن للصفيحة (OY الموجب)، بعد تعرضها إلى قوة مغناطيسية، و بذلك يصبح الجانب الأيمن سالبًا و الجانب الأيسر موجبًا، و ينشأ حقل كهربائي مواز للمحور OY الموجب (حقل هول E_H)، و يزداد تجمع الشحنات عند حافتي الصفيحة حتى تتزن القوة

المغناطيسية و القوة الكهربائية الناتجة عن فصل الشحنات، عندها يمكن حساب فرق كمون بين طرفي الصفيحة (كمون هول V_H). تسمى هذه الظاهرة بفعل هول السالب الذي يظهر عند أغلبية المعادن الاعتيادية مثل: الذهب، النحاس.

في بعض الحالات كمعدن الكوبلت و الحديد (أنصاف النواقل) يظهر فعل هول معاكس للحالة السابقة، يسمى فعل هول الموجب، أنظر الشكل (2)، و ذلك بسبب أن حاملات الشحنة موجبة ($+e$) و تصبح القوة:

$$\vec{F} = (+e)(v_d\vec{k}) \times (B\vec{\imath})$$

$$\vec{F} = ev_dB\vec{\jmath}$$

أي الشحنات الموجبة تنزاح إلى الجانب الأيمن و يصبح الأيسر سالبًا و الحقل الكهربائي في اتجاه OY السالب.

يسمح فعل هول بتحديد إشارة حاملات الشحنة في النواقل، و أيضا بتعيين كثافة حاملات الشحنة n في وحدة الحجم، فعند التوازن تتساوى القوة المغناطيسية و القوة الكهربائية:

$$eE_H = ev_dB \rightarrow v_d = \frac{E_H}{B}\ , \qquad E_H = \frac{V_H}{L}$$

$$v_d = \frac{V_H}{BL}$$

يُعطَى التيار الكهربائي بدلالة كثافة الشحنات و المقطع العرضي للصفيحة:

$$I = iS = nev_dLa$$

بتعويض قيمة السرعة المتوسطة نجد أن كثافة الشحنات تعطى:

$$n = \frac{IB}{eaV_H}$$

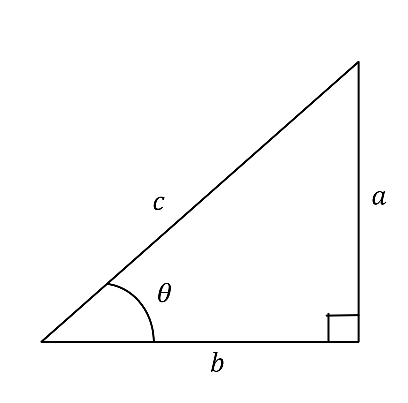
تكون مساوية تقريبا عدد إلكترونات التوصيل لوحدة الحجم، و هي في حدود $10^{20}/\mathrm{m}^3$ للمعادن الاعتيادية.

الملحق الأول

العلاقات المثلثية و حساب التفاضل و التكامل

العلاقات المثلثية

في المثلث القائم الموضح في الشكل، تعرف الدوال المثلثية كما يلي:



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c} \quad ; \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c} \quad ; \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b} \quad ; \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

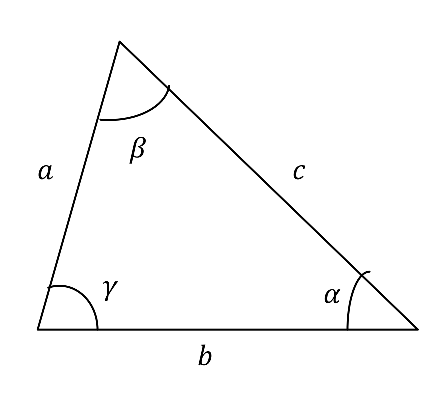
من خلال نظرية فيثاغورس *Pythagore* ،

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نحصل على العلاقة المثلثية المعروفة:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

في المثلث الكيفي الموضح في الشكل هناك علاقتان مهمتان:



قانون الجيوب تمام:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

قانون الجيوب:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

تذكر أن: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

بعض العلاقات المثلثية:

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin\frac{(A \pm B)}{2} \cos\frac{(A \mp B)}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2 \cos\frac{(A + B)}{2} \cos\frac{(A - B)}{2}$$
$$\cos A - \cos B = 2 \sin\frac{(A + B)}{2} \sin\frac{(B - A)}{2}$$
$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$
$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

الحساب التفاضلي و التكامل

الحساب التفاضلي

مشتق جداء الدالتين $u(x)$ و $v(x)$:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

مشتق مجموع الدالتين $u(x)$ و $v(x)$:

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

مشتق قسمة $u(x)$ على $v(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

مشتق دالة مركبة: و لتكن الدالة $f(u)$ حيث u هي أيضا دالة في المتغير x.

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

مشتق بعض الدوال المألوفة:

$$\frac{da}{dx} = 0 \qquad (a = \text{ثابت})$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan ax) = \frac{a}{\cos^2 ax}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln \mathrm{ax}) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{du}{dx}\cos u$$

$$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{u(x)}\right) = \frac{du}{dx}e^{u(x)}$$

حساب التكامل

التكامل باالتجزئة

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int audx = a\int udx$$

$$\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$$

يجب إضافة ثابت c للتكاملات الغير محدودة:

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \ln(ax)dx = x\ln|ax| - x + c$$

$$\int xe^{\pm ax}dx = \pm\frac{e^{\pm ax}}{a^2}(ax \mp 1) + c$$

$$\int x^2e^{-ax}dx = -\frac{e^{\pm ax}}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2) + c$$

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b}\ln|a + bx| + c$$

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^2} = -\frac{1}{b(a + bx)} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + c \qquad (x^2 < a^2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + c \qquad (x^2 > a^2)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad (x^2 < a^2)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + c$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}} + c$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{1/2}} + c$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} + c$$

$$\int \frac{dx}{x(a + x)} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + x}{x}\right| + c$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + c$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + c$$

الملحق الثاني

L'alphabet grec الأبجدية الإغريقية

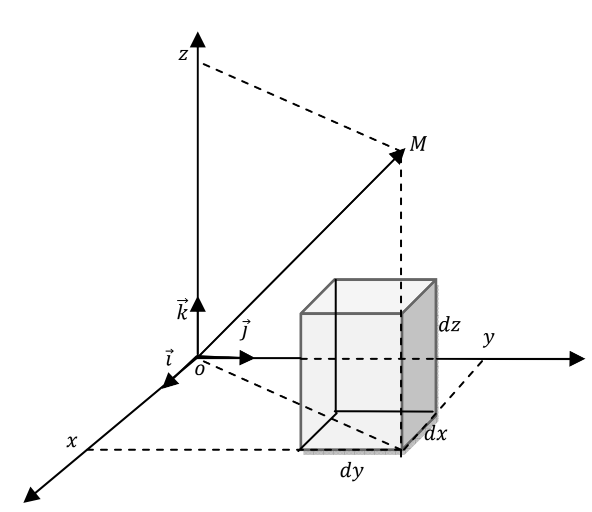
Nom الإسم	*Majuscule* الحرف الكبير	*Minuscule* الحرف الصغير
Alpha	A	α
Bêta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ε, ϵ
Zêta	Z	ζ
Iota	I	ι
Êta	H	η
Thêta	Θ	θ, ϑ
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mu	M	μ
Nu	N	ν
Ksi	Ξ	ξ
Omicron	O	o
Pi	Π	π
Rho	R	ρ, ϱ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Upsilon	Υ	υ
Phi	Φ	φ, ϕ
Xi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Oméga	Ω	ω

الملحق الثالث

السطوح و الحجم في مختلف الإحداثيات

الإحداثيات الديكارتية (*coordonnées cartésiennes*)

يُعطَى شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية كما يلي:



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}dz$$
$$= dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

عناصر السطح :

$$dS_{\perp\vec{i}} = dydz$$
$$dS_{\perp\vec{j}} = dxdz$$
$$dS_{\perp\vec{k}} = dydx$$

عنصر الحجم : $dV = dxdydz$.

لنكن $f(x,y,z)$ دالة سلمية و $\vec{A}$ دالة شعاعية حيث: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

التدرج (**Gradient**):

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

التفرق (**Divergence**):

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

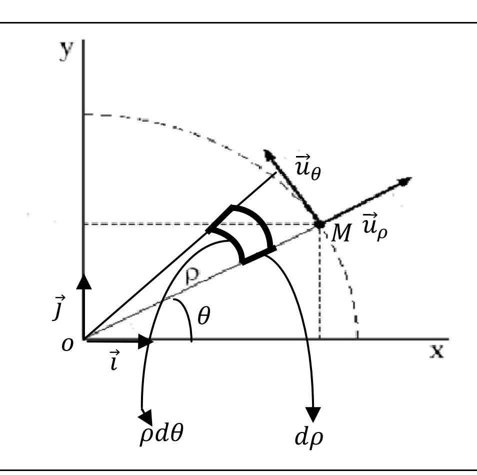
الدوران (**Rotationnel**) :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

لابلاسيان (**Laplacien**):

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

الإحداثيات القطبية (*coordonnées polaires*)

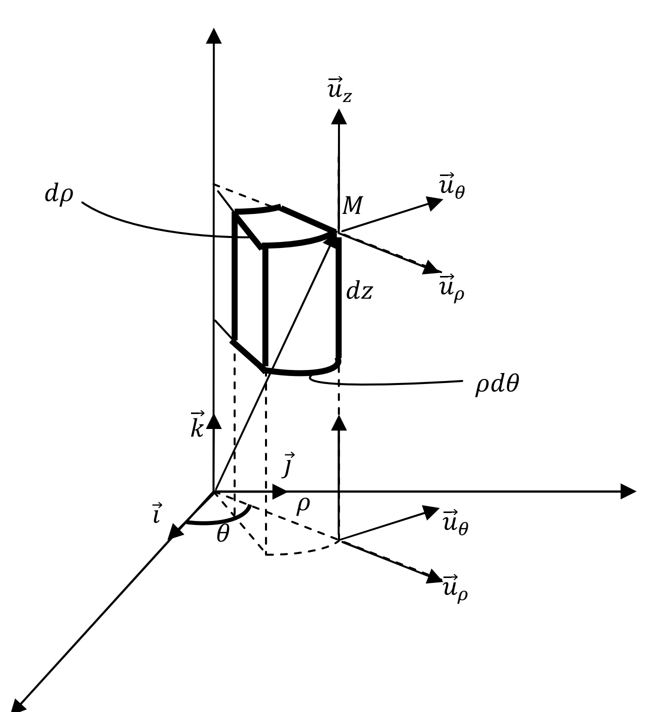


$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta$$

عنصر السطح : $dS = \rho d\rho d\theta$

الإحداثيات الاسطوانية (*coordonnées cylindriques*)



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}dz$$

$$= d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

عناصر السطح :

$$dS_{\perp\vec{u}_\rho} = \rho d\theta dz$$

$$dS_{\perp\vec{u}_\theta} = d\rho dz$$

$$dS_{\perp\vec{u}_z} = \rho d\rho d\theta$$

عنصر الحجم :

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

لتكن $f(\rho,\theta,z)$ دالة سلمية و $\vec{A}$ دالة شعاعيه $\vec{A} = A_\rho\vec{u}_\rho + A_\theta\vec{u}_\theta + A_z\vec{u}_z$:

التدرج (***Gradient***):

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

التفرق (***Divergence***):

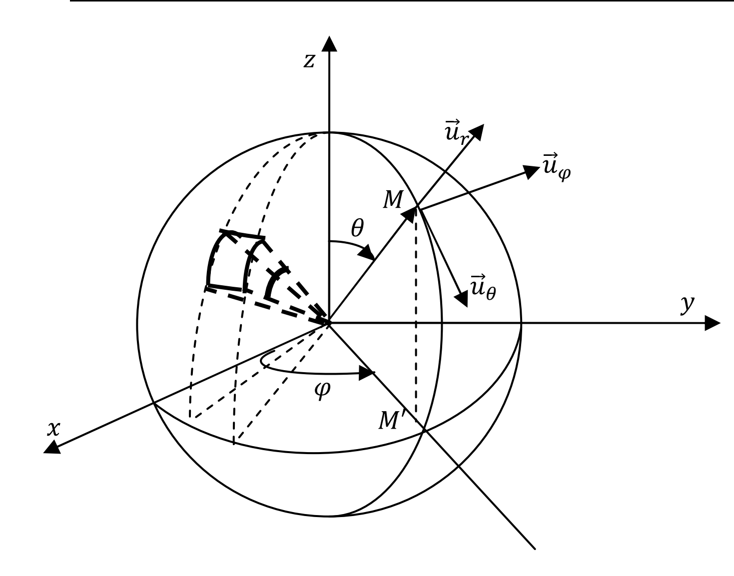
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

الدوران (***Rotationnel***):

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho - \left(\frac{\partial A_z}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\vec{u}_z$$

لابلاسيان (*Laplacien*):
$$\Delta f=\nabla^2 f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

الإحداثيات الكروية (*coordonnées sphériques*)



$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_r$$
$$d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}dr+\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi$$
$$=dr\vec{u}_r+rd\theta\vec{u}_\theta+r\sin\theta\,d\varphi\vec{u}_\varphi$$

عناصر السطح :

$$dS_{\perp\vec{u}_r}=r^2 sin\theta d\theta d\varphi$$
$$dS_{\perp\vec{u}_\theta}=rsin\theta drd\varphi$$
$$dS_{\perp\vec{u}_\varphi}=rdrd\theta$$

عنصر الحجم :

$$dV=r^2 sin\theta drd\theta d\varphi$$

ليكن $f(r,\theta,\varphi)$ دالة سلمية و$\vec{A}$ دالة شعاعيه $\vec{A}=A_r\vec{u}_r+A_\theta\vec{u}_\theta+A_\varphi\vec{u}_\varphi$:

التدرج (*Gradient*):
$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$$

التفرق (*Divergence*):
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(A_\theta sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

الدوران (*Rotationnel*):
$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{rsin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_r-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

لابلاسيان (*Laplacien*):
$$\Delta f=\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

الملحق الرابع

أجزاء و مضاعفات وحدات النظام الدولي للقياس

يوضح الجدول البدايات التي يمكن إضافتها قبل الوحدات في النظام الدولي:

معامل الضرب Facteur	الرمز symbole	البداية Préfix	معامل الضرب Facteur	الرمز symbole	البداية Préfix
10^{24}	Y	$yotto$ – يوتا	10^{-24}	y	$yocto$ – يوكتو
10^{21}	Z	$zetta$ – زيتا	10^{-21}	z	$zeto$ – زيتو
10^{18}	E	exa – إكزا	10^{-18}	a	$atto$ – أتو
10^{15}	P	$peta$ – بيتا	10^{-15}	f	$femto$ – فيمتو
10^{12}	T	$tera$ – تيرا	10^{-12}	p	$pico$ – بيكو
10^{9}	G	$giga$ – جيقا	10^{-9}	n	$nano$ – نانو
10^{6}	M	$mega$ – ميغا	10^{-6}	μ	$micro$ – مايكرو
10^{3}	k	$kilo$ – كيلو	10^{-3}	m	$milli$ – ملي
10^{2}	h	$hecto$ – هكتو	10^{-2}	c	$centi$ – سنتي
10^{1}	da	$deka$ – ديكا	10^{-1}	d	$deci$ – ديسي

مراجعة عامة

الصيغ الرياضية للكهرباء و المغناطيس

الصيغ الرياضية للكهرباء الساكنة

الحقل الكهربائي الساكن

الناتج عن شحنة نقطية ساكنة:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

الناتج عن n شحنة نقطية ساكنة:

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{{r_i}^2}\frac{\vec{r_i}}{r_i}$$

الناتج عن توزيع مستمر لشحنة:

$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)$$

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

توزيع الشحنات:

خطي: $dq = \lambda dl$

سطحي: $dq = \sigma dS$

حجمي: $dq = \lambda dV$

الكمون الكهربائي الساكن

الناتج عن شحنة نقطية ساكنة:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C$$

الناتج عن n شحنة نقطية ساكنة:

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} + C$$

الناتج عن توزيع مستمر لشحنة:

$$V(M) = \int dV(M)$$

$$= \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} + C$$

ثنائي القطب الكهربائي

عزم ثنائي القطب الكهربائي:

$$\vec{p} = q\vec{a}$$

الكمون الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب الكهربائي في نقطة بعيدة جدا:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{u}_r}{r^2}$$

عزم مزدوجة القوى المؤثرة على لثنائي القطب في حقل كهربائي خارجي:

$$\vec{L} = \vec{P} \times \vec{E}_{ext}$$

الطاقة الكامنة لثنائي القطب في حقل كهربائي خارجي:

$$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}_{ext}$$

النواقل في حالة اتزان

الحقل الكهربائي بالجوار المباشر لسطح الناقل الكهروستاتيكي:

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

سعة ناقل معزول:

$$C = \frac{Q}{V}$$

سعة مكثفة:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{مع} \quad V = V_1 - V_2$$

نظريات أساسية

نظرية غوص (نظرية التدفق):

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

نظرية التجوال:

$$dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$
$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

الطاقة الكامنة الكهروستاتيكية

لشحنة نقطية موجودة في كمون:

$$E_p = qV$$

لناقل معزول:

$$E_p = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

لمكثفة:

$$E_p = \frac{1}{2}QV \quad \text{حيث} \quad V = V_1 - V_2$$

القوة الكهروستاتيكية

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

الصيغ الرياضية للكهرباء المتحركة

كثافة التيار

$$\vec{i} = nq\vec{v}$$

التيار

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_{\text{المقطع}} \vec{i} \cdot \overrightarrow{dS} = nqv_dS$$

قانون أوم المحلي

$$\vec{i} = \sigma\,\vec{E} = \frac{1}{\rho}\,\vec{E}$$

σ الناقلية، ρ المقاومية.

قانون أوم

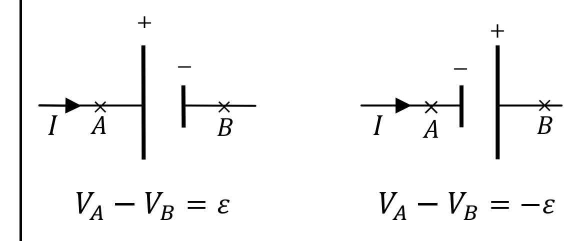
$$R = \frac{V_A - V_B}{I}$$

$$V_A - V_B = RI + e$$

$P = RI^2$ الاستطاعة الضائعة بفعل جول.

$P = eI$ الاستطاعة المستهلكة من طرف المستقبل.

$P = (V_A - V_B)I$ الاستطاعة المستهلكة بين A و B.



$P = \varepsilon I$ الاستطاعة المقدمة من طرف المولد.

قانونا كيرشوف

قانون العقدة:

$$\sum I_{\text{الداخلة}} = \sum I_{\text{الخارجة}}$$

قانون العروة:

$$\sum RI + \sum e - \sum \varepsilon = 0$$

الصيغ الرياضية للمغناطيسية الساكنة

القوة المغناطيسية

على جسم مشحون يتحرك:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

على دارة يعبرها تيار، قوة لابلاس:

$$\vec{F} = \int_{\text{الدارة}} I\overrightarrow{dl} \times \vec{B}$$

الحقل المغناطيسي

الناتج عن جسم مشحون في حالة حركة:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

الناتج عن n جسم مشحون في حالة حركة:

$$\vec{B}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_i\vec{v}_i \times \vec{u}_i}{{r_i}^2}$$

الناتج عن تيار كهربائي قانون بيو و سافار:

$$\vec{B}(M) = \int_{\text{الدارة}} d\vec{B}(M)$$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overrightarrow{dl} \times \vec{u}}{r^2}$$

ثنائي القطب المغناطيسي

عزم ثنائي القطب المغناطيسي:

$$\vec{M} = I\vec{S} = IS\vec{n}$$

عزم المزدوجة القوى المؤثرة على ثنائي القطب المغناطيسي في حقل مغناطيسي خارجي:

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B}_{ext}$$

الطاقة الكامنة لثنائي القطب في حقل مغناطيسي خارجي:

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}$$

المراجع

1. ج. ل. كوبارار، ج. فورني، ح. لعجوز: الكهرباء و الأمواج، ديوان المطبوعات الجامعية 1993.

2. ح. مراجي، س. غميض، ع. قرزيز: مسائل محلولة في الفيزياء- كهرباء الجزء الاول و الثاني، منشورات جامعة باجي مختار-عنابة

3. R.A. Serway, J. W. Jewett: Physics for Scientists and Engineers, Thomson Brooks/Cole 2004.
4. M. S. Maalem: Electricité Tome 1, 2003.
5. A. Bouhrnne: Electricité Tome 2, 1999.